国家“十一五”重点图书

量子物理新进展系列

# 量子力学语言

## ——狄拉克符号法进阶

范洪义 袁洪春 著



上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

巍巍交大　百年书香
www.jiaodapress.com.cn
bookinfo@sjtu.edu.cn

策划编辑／戴柏诚
责任编辑／徐文洁
　　　　　戴柏诚
封面设计／朱　懿

## 量子物理新进展系列

- 光学变换 · 从量子到经典
- 开放系统量子退相干的纠缠态表象论
- 量子力学的不变本征算符方法
- **量子力学语言——狄拉克符号法进阶**
- 量子力学的相空间理论
- 一维波动力学新论

ISBN 978-7-313-07246-7

定价: 60.00元

量子物理新进展系列
上海科技专著出版资金资助项目

# 量子力学语言
## ——狄拉克符号法进阶

范洪义　袁洪春 著

上海交通大學出版社

## 内 容 提 要

量子力学创始人之一狄拉克的符号法是学习研究量子论的人所必须习惯的"语言",它对物理本质的深刻反映在某种程度上超越了时代,其内涵与美仍然需要进一步的认知。正如狄拉克本人所言:"符号法……在将来当它变得更为人们所了解,而且它本身的特殊数学得到发展时,它将更多地被人们所采用。"本书提出有序算符内的积分(IWOP)技术,实现了将牛顿-莱布尼茨积分直接用于由狄拉克符号组成的算符以达到发展量子论之数理基础的目的,进一步揭示了狄拉克符号法的科学美,开拓了连续变量纠缠态表象在多个物理领域的新应用,为量子力学开辟了一个崭新的研究方向。本书运用符号法,结合IWOP新技术和新表象,提出并阐述了很多新的有意义的物理课题。

本书可供高等院校物理学科的本科生和相关专业的研究生阅读与学习,也可供从事基础物理理论研究和应用的科研人员参考与借鉴,能极大地提高他们对量子理论的鉴赏能力和科研能力。

**图书在版编目(CIP)数据**

量子力学语言:狄拉克符号法进阶/范洪义,袁洪春著.
—上海:上海交通大学出版社,2011
(量子物理新进展系列)
ISBN 978-7-313-07246-7

Ⅰ.量... Ⅱ.①范... ②袁... Ⅲ.①量子力学
Ⅳ.O413.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 070222 号

本书出版由上海科技专著出版资金资助

**量子力学语言**
**——狄拉克符号法进阶**
范洪义 袁洪春 著
上海交通大学出版社出版发行
(上海市番禺路 951 号 邮政编码 200030)
电话:64071208 出版人:韩建民
常熟市华通印刷有限公司 印刷 全国新华书店经销
开本:850mm×1168mm 1/32 印张:10.25 字数:270 千字
2011 年 10 月第 1 版 2011 年 10 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-313-07246-7/O 定价:60.00 元

## 出版说明

科学技术是第一生产力。21 世纪，科学技术和生产力必将发生新的革命性突破。

为贯彻落实“科教兴国”和“科教兴市”战略，上海市科学技术委员会和上海市新闻出版局于 2000 年设立“上海科技专著出版资金”，资助优秀科技著作在上海出版。

本书出版受“上海科技专著出版资金”资助。

上海科技专著出版资金管理委员会

# 前　　言

1926 年,Dirac(狄拉克)发表了“关于量子力学理论”的论文。不久,爱因斯坦就写信给荷兰物理学家埃伦费斯特,信中说:“我对 Dirac 感到很头疼,就像走在令人眩晕的小径上,在这种天才与疯狂之间保持平衡是很可怕的。”于是,埃伦费斯特就写信给 Dirac,说:“由于爱因斯坦非常希望理解您的论文,我们一干就是几个小时试图理解它……我们要花很长时间才能理解你论著里的几页!而且很多要点对我来说仍然像在漆黑的夜晚里无法看清。”大约在同一时期,薛定谔在给玻尔的信中这样写道:“Dirac 有一种完全独创性、独特的思维方式,他完全不知道他的论文对普通的读者是多么难。”

另一量子物理学大师海森伯则说:“在量子论中出现的困难……是有关语言运用问题。首先,我们在使用数学符号与普通语言表达的概念相联系方面无先例可循;我们从一开始就知道的只是不能把日常的概念用到原子结构上去。”是 Dirac 在总结了海森伯的矩阵力学与薛定谔的波动力学后发明了阐述量子理论的精确而自恰的数学形式,他发明的符号法是优秀而精辟的符号在现代物理学中应用的一次高潮。作为量子力学的标准语言,符号法成功地引入了 $q$ 数的表象和变换理论,“用抽象的方式直接地处理有根本重要意义的一些量”,“能深刻地反映物理本质”,并能引申出量子物理中的一系列新概念。难怪玻尔说:“Dirac 是所有物理学家中最纯洁的灵魂。”

英国物理学家霍金这样论 Dirac 的贡献:“他写出了一篇出色的论文,其中他阐述了任何系统的量子力学的一般规则。这些规则结合了海森伯和薛定谔的理论并指出它们的等价性。在现行量

子力学的三个奠基人中，海森伯和薛定谔的功劳是他们各自看到了量子理论的曙光，但是正是 Dirac 把他们看到的交织在一起，并揭示了整个理论的图像”。大数学家冯·诺依曼写过一本《量子力学的数学原理》，认为 Dirac 的理论体系“就其简洁和优美而言是很难超过的”。纳维尔·莫特曾这样评价 Dirac：“他是能够完全独立工作的极少数科学家之一，如果他有一个图书馆，他可能连一本书和期刊都用不着。”关于符号法中的变换理论，Dirac 本人曾说：“这是我一生中最使我兴奋的一件工作……，变换论是我的至爱(The transform theory (became) my darling)。”在另一个场合他又说：“我的许多论文仅仅来自一个十分偶然出现的想法的结果……但是我关于量子力学的物理诠释工作却是一种值得夸奖的成功，符号法是永垂不朽的。”

自古以来，以贴切地表现概念为目的，符号在人们的日常生活中扮演着重要的角色。为了无障碍的交流，古人发明了象形符号并通过组合将之演变成更为抽象的文字，如苏美尔的楔形文字、殷商的甲骨文；为了反映数目的概念，数字应运而生，其中阿拉伯数字以其简明和若干历史原因而最终为世界所通用；随着近代科学技术的发展，合适地诠释物体属性或描述物体运动状态及其变化过程成为时代的需求，与之相应的一系列物理量也用字母符号来加以表示。20 世纪初量子力学的诞生扫除了物理学上空的两朵乌云，是物理学史上的重大事件，但量子的概念因其革命性的观点和特殊的运算规则而在相当一段时间里缺乏统一的、适当的描述。爱因斯坦在《物理学的进化》一书中曾提出：“我们可以说建立一种新理论不是像毁掉一个旧仓库，在那里建起一个摩天大楼。它倒是像在爬山一样，愈是往上爬愈能得到新的更宽广的视野，并且愈能显示出我们的出发点与其周围广大地域之间的出乎意外的联系。但是我们出发的地点还是在那里，还是可以看得见的，不过显得更小了，只成为我们克服种种障碍后爬上山巅所得到的广大视野中的一个极小的部分而已。”

理论物理也有视野或境界吗？读者也许要问，只听说中国的古典诗词有境界，怎么理论物理也有呢？诚然，中国唐诗宋词的一大特点是境界高雅、深邃、超逸，什么是境界呢，我们的肤浅理解是人们在读和写文艺作品时个人的感受能力或顿悟可以达到的地方，或是指精神上所能享受到愉悦或共鸣的境地。诗词中事、情、景交融升华的艺术成就越高，则境界就越高，高手的文章则往往从"有我之境"到"无我之境"，即"不知何者为我，何者为物"，"物我两忘"。我们在学习与写作理论物理论文时也有境界，它是我们对于论文的简洁性，质朴美以及潜在应用的感受能力之所及。当欣赏者自已能置身于内，并有所创新与发展时，那么境界就上升为意境。对于理论物理美感与简洁把握得越好，则境界就越高。Dirac 的论文是简洁与美的和谐结合，又有广泛的实用意义，所以其境界就高。所谓"高举远慕，有遗世之意"，我们在读他文章时，从开始不懂、生疏，到了解、掌握与欣赏，就开拓了我们的境界，就像读唐诗一样，从不会欣赏到会欣赏，是一种境界提高的过程。当我们能发展 Dirac 的若干前驱性工作，作出了令世人瞩目的新贡献时，境界就演变为意境，我们就从"有我之境"进化到了"无我之境"，完全陶醉在文章的优美谐调中。艺术风格有难有易，简易不是平庸与浮浅，简易是艺术最后的成就，古今中外最大的艺术作品都是简单而深刻的，从而能流芳百世，但要达到简易，必先经历磨难与锤炼。意境深远的理论物理作品看上去是水到渠成，不露雕凿痕迹，似乎是信手拈来，不假思索的，如 Dirac 描写电子的方程。范洪义所创造的符号法中的有序算符内的积分理论(简称 IWOP 技术)，它将原本只适用于可对易函数的牛顿-莱布尼茨积分公式推广到由 Dirac 符号 ket-bra 组成的非对易量子算符的积分运算，不仅丰富了 Dirac 符号的运算规则，大大简化了计算，而且有利于揭示 Dirac 符号法蕴藏的和谐与优美。正如 Dirac 所说："……对于一个有经典对应的量子动力学系统，量子理论中的幺正变换就是经典理论中切变换的对应。"而 IWOP 技术是找到这种对应的有效

方法。

总之，Dirac 的符号法是量子力学的“一种内在的生气、情感、灵魂、风骨和精神”，本书论述如何发展它到更高一层，以进一步体现量子力学理论作为一部艺术作品的意蕴，使读者能够直接从狄拉克符号法得到其物理思想之表象。

本书在筹划和写作过程中，作者范洪义得到妻子翁海光以及研究生的协助，他们是胡利云、徐学翔、范悦、陈俊华、许业军、吕翠红、王帅、王震、孟祥国等，在此谨致谢意。也感谢上海交通大学校领导谢绳武、叶取源、张杰和物理系叶庆好教授、庞乾骏教授等的大力支持及有益帮助。每当夜深人静、身心疲倦想偷点儿懒时，范洪义脑海里就会闪现慈母毛婉珍 50 多年前在灯下为小学生批阅作文时边读边改时的情景，她那清瘦的脸庞和慈祥的目光浮现在眼前，鞭策着他再打起精神，坚持工作一会儿。另一作者袁洪春在写作过程中得到了常州工学院光电工程学院的支持和妻子李恒梅的帮助，在此深表感谢。

科研作品贵在学府渊源，标新立异，方能使读者动其妍思，引其芳绪。人的精力与时光有限，而追求科学真理无涯，因此吾人读书，当读创意鲜明者、理论优美者、方法直捷者、叙述清晰者、悠久不朽者，以此五点为标准，则鲜见佳本也。本书作者不才，写作时尽量以此五点标准来要求自己，然终究水平有限，祈望四方读者批评教正。

# 目　录


**第 1 章　正规乘积算符内积分技术发展 Dirac 符号法** ………… 1

1.1　Dirac 符号法的效用，功能及发展的切入点 ………… 1

1.2　正规乘积算符内的积分技术 ………… 6

1.3　用 IWOP 技术和正态分布讨论量子力学基本表象 … 10

1.3.1　坐标、动量表象的自然出现 ………… 11

1.3.2　坐标-动量中介表象的自然引入 ………… 15

1.3.3　相干态表象的自然导出 ………… 18

1.4　有趣的 Dirac 符号的积分——压缩算符 ………… 23

1.5　一维高斯扰动的能级修正 ………… 28

1.6　多模指数算符的正规乘积形式 ………… 31

1.7　反正规乘积算符内的积分技术 ………… 38

**第 2 章　Weyl 编序算符内积分技术发展 Dirac 符号法** ……… 44

2.1　用 IWOP 技术导出 Wigner 算符的坐标表象表示 …… 44

2.2　Wigner 算符的 Weyl 编序形式 ………… 46

2.3　算符 $\hat{X}^m\hat{P}^r$ 的 Weyl 编序展开形式 ………… 50

2.4　任意算符的 Weyl 编序展开公式 ………… 55

2.4.1　算符 $G(a^\dagger,a)$ 的经典 Weyl 对应的一般公式 ………… 55

2.4.2　任意算符的 Weyl 编序展开公式 ………… 57

2.5　Weyl 编序算符内的积分技术(IWWOP) ………… 60

2.6　纯相干态密度算符的 Weyl 编序形式及其应用 ……… 63

**第 3 章　用 IWOP 技术构造菲涅耳算符及其应用** ………… 67
3.1　从坐标表象到坐标-动量中介表象的幺正变换 ……… 67
3.2　菲涅耳算符的 Weyl 编序与分解 ………………… 70
3.3　菲涅耳变换求解含时谐振子的演化………………… 76

**第 4 章　基于广义 Randon 变换构造多模纠缠态表象** ……… 82
4.1　用 Wigner 算符的广义 Randon 变换求纯态 ………… 82
4.2　量子力学的两体纠缠态表象…………………………… 85
4.2.1　两粒子相对坐标与总动量的共同本征态 $|\eta\rangle$ ……………………………… 85
4.2.2　两粒子质心坐标与相对动量的共同本征态 $|\xi\rangle$ ……………………………… 87
4.2.3　两粒子质量不相等的情况 ………………… 89
4.3　量子力学三体相容算符的共同本征态………………… 90

**第 5 章　两体连续纠缠态表象的应用** …………………… 94
5.1　纠缠态表象中的 Weyl 变换、Wigner 算符与 Weyl 对应规则 ……………………………… 94
5.2　正定的纠缠 Wigner 算符与不同质量的两体纠缠态表象 ……………………………… 100
5.3　用纠缠态表象求解动量耦合的两体动力学 ………… 105
5.3.1　在 $\langle\zeta|$ 表象中求解 $\hat{H}$ 的能量本征波函数…… 105
5.3.2　在 $\langle\eta|$ 表象中求解 $\hat{H}$ 的能量本征波函数与能级 ……………………………… 108
5.4　量子谐振子的二维高斯微扰 ……………………… 111
5.5　纠缠态表象求解复变量 Fokker-Planck 方程 ……… 114

**第 6 章　量子相空间中的新积分变换** …… 121

6.1　量子力学中范氏变换的出现 …… 121

6.2　纠缠 Wigner 算符的新变换与应用 …… 129

**第 7 章　用 IWOP 技术导出若干算符恒等式与新积分公式** …… 137

7.1　有关单变量 Hermite 多项式的算符恒等式与新积分公式 …… 137

7.1.1　$H_n(\hat{X})=2^n:\hat{X}^n:$的推导与应用 …… 137

7.1.2　$H_n(\hat{X})=2^n:\hat{X}^n:$形式的推广 …… 142

7.1.3　用 Hermite 多项式展开的新公式 …… 147

7.1.4　$\hat{X}^{-n}$的 Hermite 多项式展开 …… 149

7.1.5　若干复杂的算符恒等式与积分公式 …… 152

7.1.6　$(\mu a+\upsilon a^\dagger)^m$ 与 $H_m(\mu a+\upsilon a^\dagger)$的正规乘积与反正规乘积形式 …… 155

7.1.7　有关 Hermite 多项式的若干新积分公式 …… 160

7.2　有关 Laguerre 多项式的算符恒等式 …… 162

7.3　有关双变量 Hermite 多项式的算符恒等式与积分公式 …… 165

7.4　用纠缠态表象导出双变量 Hermite 多项式的算符恒等式与积分公式 …… 169

7.5　含有 Stirling 数的算符恒等式 …… 178

**第 8 章　用 IWOP 技术构造一种三体纠缠态表象及其应用** …… 184

8.1　新三体纠缠态表象的构造 …… 185

8.2　新三体纠缠态的 Schmidt 分解 …… 189

8.3 连续两体纠缠态的远程传输 …………………………… 191
8.4 新的三模 $SU(1,1)$压缩算符 ………………………… 193
8.5 三模纠缠 Wigner 算符 ……………………………… 195

**第9章 用 IWOP 技术求热场动力学中的热真空态** ……… 201
9.1 用 IWOP 技术导出的热真空态$|0(\beta)\rangle$ ………………… 202
9.2 广义的热真空态$|\phi(\beta)\rangle$ …………………………… 204
9.2.1 用 IWOP 技术导出$|\phi(\beta)\rangle$ ………………… 204
9.2.2 用$|\phi(\beta)\rangle$导出系统的内能分布 ……………… 206
9.2.3 $|\phi(\beta)\rangle$的 Wigner 函数与量子 Tomogram … 207
9.3 广义的两模热真空态$|\varphi(\beta)\rangle$ ……………………… 209
9.3.1 用 IWOP 技术导出$|\varphi(\beta)\rangle$ ………………… 209
9.3.2 用$|\varphi(\beta)\rangle$导出系统的内能分布 ……………… 212
9.3.3 利用广义 Feynman-Hermann 定理
验证热真空态 ……………………………… 213

**第10章 用 IWOP 技术研究四元数的积分和相干态** ……… 216
10.1 一些四元数积分公式的导出………………………… 217
10.2 从相干态$|z\rangle$扩展到四元数相干态$|w\rangle$ ……………… 222
10.3 四元数相干态完备性的应用………………………… 223

**第11章 指数算符的矩阵 *LDU* 分解法** …………………… 226
11.1 对应于 2×2 变换矩阵的指数算符分解 …………… 226
11.2 对应于 3×3 变换矩阵的指数算符分解 …………… 228
11.3 对应于 $n\times n$ 变换矩阵的指数算符分解 …………… 233

**第12章 *s* 编序算符内的积分技术及其应用** ……………… 239
12.1 密度矩阵的 $s$ 编序展开公式与 IWSOP 技术 ……… 240

12.1.1 带 $s$ 参数的广义 Wigner 算符与 Weyl 对应规则 …… 240
12.1.2 密度矩阵的 $s$ 编序展开公式——玻色子情况 …… 243
12.2 $s$ 编序算符的恒等式 …… 248
12.2.1 $a^{\dagger m}a^{n}$ 的 $s$ 编序展开形式 …… 248
12.2.2 Ⓢ $a^{\dagger m}a^{n}$ Ⓢ的正规乘积形式 …… 249
12.2.3 Ⓢ $a^{\dagger m}a^{n}$ Ⓢ的 $s'$ 编序展开形式 …… 250
12.3 量子力学基本表象的 $s$ 编序展开式 …… 252
12.3.1 坐标表象与动量表象的 $s$ 编序形式 …… 252
12.3.2 纠缠态表象的 $s$ 编序形式 …… 257
12.4 含 $s$ 参数的 Wigner 算符的 Randon 变换 …… 261
12.4.1 $\Delta(x, p)$与 $|q\rangle_{\mu,\nu,\nu,\mu}\langle q|$ 的 $s$ 编序展开式 …… 262
12.4.2 $(\mu\hat{X}+\nu\hat{P})^{n}$ 的 $s$ 编序展开式 …… 263
12.4.3 $\mathrm{H}_{n}(\mu\hat{X}+\nu\hat{P})$的 $s$ 编序展开式 …… 265
12.5 压缩混沌光场的 Weyl 对应与 $P$ 表示 …… 266

**第 13 章 量子光学中光子计数的新公式** …… 269
13.1 密度算符 $P$ 表示下的光子计数公式 …… 270
13.2 带 s 参数的光子计数公式 …… 276

**第 14 章 费米系统的 IWSOP 技术及其应用** …… 279
14.1 费米系统的相干态与 IWOP 技术 …… 279
14.2 带 s 参数的费米系统 Wigner 算符与量子化规则 …… 282
14.3 费米密度矩阵的 s 编序展开公式与 IWSOP 技术 …… 285

14.4 有关费米算符的 s 编序展开式…………………………… 287

**参考文献**…………………………………………………………………… 291

**结语**………………………………………………………………………… 310

# 第1章　正规乘积算符内积分技术发展 Dirac 符号法

## 1.1　Dirac 符号法的效用,功能及发展的切入点

20 世纪初普朗克在黑体辐射谱的研究中慧眼独具发现了量子,宣告量子理论的诞生,是物理学史也是人类文明史上的重大事件. 随后,量子力学的基本概念和规律(方程)分别由海森伯不确定原理(矩阵力学)和薛定谔方程(波函数)所揭示,扬弃了玻尔旧量子论. 关于量子理论的诞生 1995 年霍金曾评价道:"……海森伯和薛定谔的功劳是他们各自看到了量子理论的曙光,但是正是 Dirac 把他们看到的交织在一起并揭示了整个理论的图像."那么 Dirac 是靠什么来实现这个统一的呢? 他靠的就是发明了符号法(bra 和 ket),以及用他的符号表征的表象与变换理论. 理论物理学家温伯格认为科学发现的方法通常包括着从经验水平到前提的或逻辑上的不连续性的飞跃,对于某些科学家来说(如爱因斯坦和 Dirac),数学形式主义的美学魅力常常提示着这种飞跃的方向.

Dirac 发明的符号法使得量子力学新颖的基本概念和规律可用特殊的符号来统一地描写(物理学家赫兹认为好的符号比发明它的人还要聪明),这种描述被证明为是贴切的、聪明的、简洁的、永恒的. 自古以来,以贴切地表现概念为目的,符号在人们的日常生活中扮演着重要的角色. 为了无障碍的交流,古人发明了象形符号,并通过组合将之演变成更为抽象的文字,如苏美尔的楔形文字,殷商的甲骨文. 为了反映数目的概念,数字应运而生,其中阿拉伯数字以其简明和若干历史原因而最终为世界所通用. 随着近代

科学技术的发展，合适地量度物体属性或描述物体运动状态及其变化过程成为时代的需求，与之相应的一系列物理量也用字母符号来加以表示.

用 Dirac 符号可把海森伯矩阵算符简化为$|\rangle\langle|$(Dirac 称之为 $q$ 数，右矢$|\rangle$代表列矩阵，左矢$\langle|$代表行矩阵，$\langle|\rangle$是普通数($c$ 数)；而坐标空间薛定谔波函数 $\psi(x)$被表达为$\langle x|\psi\rangle$，注意这样一来，就引入了坐标 $x$ 表象. $\langle x|p\rangle$即代表表象变换. 表象(representation)原指客观事物在人类大脑中的映象，用以描述不同"坐标系"下微观粒子体系的状态和力学量的具体表示形式. 它把系统状态的波函数看成抽象空间中的态矢量，力学量的本征函数系即此空间的一组基矢，波函数由这组基矢和相应的展开系数表示. Dirac 符号法成功地引入了 $q$ 数和表象理论[1]，"用抽象的方式直接地处理有根本重要意义的一些量"，使得贴切地表达量子物理中的一系列新概念并进一步加以运算成为可能. Dirac 符号业已成为量子力学的标准语言.

Dirac 符号是随着量子力学的诞生而应运而生的，Dirac 曾回忆说："……那时我是一个研究生，除了研究外，没有别的任务. 我感谢我生逢其时的事实，年长几年或者年轻几年都给我机会."Dirac符号由于其简洁与高度的抽象，从一开始就得到人们的青睐. 毫无疑问，它也应该随着量子理论与实验的不断进展而日趋丰富、深化和完善，Dirac 符号是外在的量子世界与 Dirac 本人的精神世界发生联系时他所产生的一种特殊的感觉，他之所以有这种与众不同的感觉是由于他有工科知识的背景，具体地说是投影矢量空间的知识(或者张量的知识)，这种特殊的感觉经过理性的抽象后倾吐出来，于是就有了态矢(bra 和 ket)，这是 Dirac 的天才之处. 因为一个好的符号不但能够简洁深刻地反映物理本质，把物理内容与数学符号有机对应，而且可以大量地节约人们思维的脑力. 例如他把一个跃迁矩阵元记为$\langle out|\hat{X}|in\rangle$就形象地反映出初始状

态$|in\rangle$经过一个仪器($\hat{X}$ 作用)而变为输出状态$\langle out|$.

在量子物理中,通向更深入的基本知识的道路是与最简洁的数学描述相联系的,所以 Dirac 说过:"……符号法,在将来当它变得更为人们所了解,而且它本身的数学得到发展之时,它将更多地被人们所采用."以下我们就努力实现 Dirac 的期望,发展其符号法,我们选择的研究方向是能否对连续的 ket-bra 组成的算符积分. 早在 1966 年末范洪义自学《量子力学原理》[2]一书时就意识到对这类算符的积分存在困难,例如怎样完成积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x/2\rangle\langle x|\,\mathrm{d}x=?$,其中 $|x\rangle$是坐标本征态,尽管以往的书中有量子力学坐标表象的完备性 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x\rangle\langle x|\,\mathrm{d}x=1$. 这个问题乍一看似觉肤浅,但实际上是一个 ground breakthrough stone corner 问题. 因为 17 世纪继牛顿-莱布尼茨发明微积分后,在 18 世纪泊松是第一个把积分推广到复平面上的人,所以泊松积分代表微积分发展的一个 stone corner. 而如今如何把使牛顿-莱布尼茨积分适用于$|\rangle\langle|$的积分难道不是一个挑战吗?

范洪义记得中国科大原副校长、物理学家严济慈曾指出:"教书要深入浅出,学习要浅入深出."注意这里指的学习是广义的,即包含研究. 多年来在教育界"深入浅出"这个成语用得较多,也是大众追求的目标;但是对于"学习要浅入深出",严济慈先生的观点可谓惊世骇俗,范洪义相信他琢磨的积分问题符合浅入深出的科研途径. 综观近代物理发展史可见,很多理论物理的重大创新成果都来自"浅入深出". 爱因斯坦是浅入深出做学问的大师,例如,他从光速不变推出狭义相对论;从引力质量为何等于惯性质量入手,建立广义相对论体系. 又如德布罗意注意到由相对论的质能关系式,凡粒子皆有能量;再由普朗克公式,能量可关系于频率,有频率皆表现为脉动,而脉动的粒子就有波动性,所以粒子总是同某种波动性相联系. 他于是导出了物质波长与物质粒子的动量之间存在

$\lambda=h/(mv)$的重要而深刻的关系，这是浅入深出的生动体现. 狄拉克关于正电子的预言是研究理论物理体现"学习要浅入深出"的又一范例. 正如他自己所回忆的："答案来自数学游戏. 我玩弄着三个量 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$，我用它们来描述电子自旋. 我注意到，如果作出表达式 $\sigma_1 p_1+\sigma_2 p_2+\sigma_3 p_3$，并把它平方(其中 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 是泡利矩阵，$p_1$，$p_2$，$p_3$ 是动量的三个分量)，得到的正好是动量的平方和 $p_1^2+p_2^2+p_3^2$. 这是非常漂亮的数学结果，看来它必定很重要，它为取得三个平方项之和的方根取线性形式提供了一个有效方法. 然而如果我们要想有一个粒子的相对论性理论，我们就需要四个平方项之和的方根，用这个方法却不行." 狄拉克后来突然想到没有必要死守量不放，既然他们可以用两行两列的矩阵来表示，也许可以用四行四列来代替，这样就很容易得到四个平方项之和的方根，在 1928 年 1 月初他得到了形如$(p_0-\alpha_1 p_1-\alpha_2 p_2-\alpha_3 p_3-\alpha_4 mc)\psi=0$ 的，以后被称为"狄拉克方程"的电子波动方程，有深远的意义.

尽管范洪义提出了正确的有价值的问题，但当时正值"文化大革命"，正常的课堂教学和科研秩序被"革"掉了，所以他也无从向人请教. 但是一个问题总是如影随形地萦绕在他的脑海，他总想应当发明一个办法去实现这类积分，因为这类积分包括大量的幺正变换，也可用于表明各种表象的完备性. 完成这类积分，人们就可以找到许多新的物理态与新的表象，从而推陈出新使量子力学有一个别开生面的发展. 换言之，范洪义觉得必须要把对经典函数的牛顿-莱布尼茨积分理论推广到对于算符的积分，才能使符号法更完美、更实用. 到了 1978 年，长期思索这个问题终于导致范洪义发明了"有序算符的积分技术(IWOP 技术)"[3~8]，把牛顿-莱布尼茨的对于普通函数的积分发展到对狄拉克符号的积分，不但深刻地揭示了量子力学数理结构内在的美，而且另辟蹊径地发展了量子力学的表象与变换论，特别是连续变量纠缠态表象的建立，深刻地表述了丰富的量子纠缠现象，可谓"浅入深出"，推陈出新，别开生面. 有关这方面的 Review 文章连篇的发表在国际上有影响力的

物理杂志“Ann. Phys.”和“J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.”上[9~14].

以上例子表明，“浅入”可以指用很简洁明快的思想切入到主题，“深出”即指经过努力得到深刻而深远的新结论. “浅”和“深”是相对的，某些看来是浅的东西，却意境深远；而深的知识经过“更上一层楼”的观点来思考，也会觉得浅显易懂. 另一方面，乍看是浅显的东西，往往是抽象的，要“深出”并不易，就像从深邃的海洋中游出来那样有难度. 学习的深浅也因人而异，我们在求学时既不能浅尝辄止，也不提倡一味地钻牛角尖，因为这与深入不同. 这可以苏东坡的诗为证：“西湖天下景，游者无贤愚. 浅深随所得，谁能识其全.”

古人云：“天下之文，莫妙于言有尽而意无穷，其次则能言其意之所欲言.”理论物理的成果应是“看上去是简单的但应用是广泛的，后续工作也会层出不穷的”，Dirac 的符号法就是言有尽而意无穷的典范. 唐代诗人贾岛的诗：“鸡声茅店月，人迹板桥霜”也是如此，因而能流传千古.

拉普拉斯曾说：“认识一个天才的研究方法，对于科学的进步……并不比发现本身更少用处.”量子力学的另一位创始人薛定谔也十分重视理论方法，他曾说：“德布罗意能从一个巨大的理论框架上思考问题，这一点确实比我高明，那是我过去所不知道的. 德布罗意在数学技巧上的处理和我过去的工作差不多，只是稍微正规些，却并不优美，更没有从普遍性上加以说明.”正是这种对普遍性规律的追求，促使薛定谔在汲取德布罗意科学思想的基础上，去寻找波动方程的数学表达式，从而建立一种更普遍的波动理论. 以后读者将会相信，如果一个人仅仅知道 Dirac 符号，而不知道有序算符内的积分技术，那么他就看不到 Dirac 符号更深层次的美感与震撼力，也不能体会为什么 Dirac 曾不止一次地讲到他一生中最喜欢的工作就是用符号法对量子力学所作的诠释，也不会灵活运用 Dirac 符号. 在读了本书以后就可以对 Dirac 符号知其然又

知其所以然，极大地提高科研能力和对量子理论的鉴赏能力.

读者将会领悟到 IWOP 技术的问世实现了 Dirac 生前的期望，是解读和发展符号法及表象理论的有效"工具". 范洪义十分感谢 Dirac 发明了永垂不朽的符号系统，它不但能深刻、简洁地反映物理本质，而且也为后人去发展它奠定了基础，使得他有幸能另辟蹊径地找到发展其符号法的突破口，在经历了三十年的苦心钻研后，使量子力学的表象与变换理论推陈出新，有一个令世人瞩目的、有长远影响的别开生面的发展.

Dirac 的文风简练、"文章合有老波澜"，皆由博返约之功，如成年之酒，风霜之木，药淬之匕首，非枯槁简寂之谓. 我们继承与发展它，必须力学苦思，经年不倦. 尤其是要写一本论述 Driac 符号法进阶，则作者需有才、有胆、有识、有力. 古人云："人有才则心思出，有胆则笔墨从容，有识则能取舍，有力则可自成一家."以此衡量，则余之才不逮中人之余，余之学则又未窥量子论之万一，实不敢以覆瓿之作自炫而跻身于作者之列. 但同行朋好有恐余之消沮闭藏以没世，督促余将研究心得见于读者，祈望本书为诸君子所不鄙.

为了阐述如何用 IWOP 技术来发展 Dirac 符号法，以便对天才的 Dirac 的研究方法有更深刻地了解，下面，以正规乘积算符内积分技术为例，介绍 IWOP 技术的基本思想.

## 1.2 正规乘积算符内的积分技术

虽然正规乘积的概念起源于量子场论，并在 Louisell 的书中有所介绍[15]，我们觉得其有关性质需作进一步阐明. 不失一般性，玻色算符 $a^\dagger$和 $a$ 的任何多项式函数可写为

$$K(a,a^\dagger) = \sum_j \cdots \sum_m a^{\dagger j} a^k a^{\dagger l} \cdots a^m f(j,k,l,\cdots,m), \quad (1.1)$$

其中：$j,k,l,\cdots,m$ 是正整数或零. 利用玻色算符对易关系 $[a,a^\dagger] = 1$，总可以将所有的产生算符 $a^\dagger$都移到所有湮灭算符 $a$

的左边，这时的 $K(a,a^\dagger)$ 已被排列成正规乘积形式 $:f(a,a^\dagger):$，即已经纳入 $::$ 之中. 正规乘积有一些主要性质(它们在相当长时期内被忽略了，而它恰恰能用来发展量子与变换理论)：

(1) 在正规乘积内部玻色算符相互对易. 为什么原本不对易的 $a^\dagger$ 与 $a$ 在 $::$ 内部可交换呢?其原因是当把已正规乘积化的算符函数 $:f(a,a^\dagger):$ 两边的 $::$ 脱去时，必须事先把所有的 $a^\dagger$ 都移到 $a$ 的左边；反之，只有当上述条件得到满足时，才能在两边加上 $::$. 当加上 $::$ 后，内部的 $a^\dagger$ 与 $a$ 在交换时就是任意的. 例如 $aa^\dagger = a^\dagger a + 1$，但是 $:aa^\dagger: \neq :a^\dagger a: + 1$，而是

$$:aa^\dagger: = a^\dagger a = :a^\dagger a:, \tag{1.2}$$

这个性质十分重要，因为它提供了一个"调和"算符与数的明显界限的作用. 在经典力学中处理的是数，而在量子力学中遇到的是一般互不对易的算符，而借助正规乘积记号，就可以在若干种运算中把算符作为可对易的参数对待.

(2) $c$ 数可以自由出入正规乘积记号，即

$$:cf(a,a^\dagger): = c:f(a,a^\dagger):. \tag{1.3}$$

(3) 正规乘积内的正规乘积记号可以取消，或在 $::$ 内部的任意两个算符(相邻的或不相邻的)的紧外边可以加上正规乘积记号. 例如

$$:g(a,a^\dagger)[:f(a,a^\dagger):]: = :g(a,a^\dagger)f(a,a^\dagger):,$$
$$a^{\dagger m}:f(a,a^\dagger):a^n = :a^{\dagger m}f(a,a^\dagger)a^n:. \tag{1.4}$$

(4) 正规乘积内部算符函数的和差可以分拆，即

$$:g(a,a^\dagger) \pm f(a,a^\dagger): = :g(a,a^\dagger): \pm :f(a,a^\dagger):, \tag{1.5}$$

注意两个正规乘积算符函数之积一般不再是正规乘积.

(5) 厄米共轭操作可以进入 $::$ 内部进行，即

$$:(W\cdots V):^\dagger = :(W\cdots V)^\dagger:. \tag{1.6}$$

例如 $(:a^n a^{\dagger m}:)^\dagger = a^{\dagger n}a^m$，而 $:(a^n a^{\dagger m})^\dagger: = :a^m a^{\dagger n}: = a^{\dagger n}a^m$.

(6) 正规乘积内部以下两个等式成立：

$$[a, :f(a,a^\dagger):] = :\frac{\partial}{\partial a^\dagger}f(a,a^\dagger):,$$

$$[:f(a,a^\dagger):, a^\dagger] = :\frac{\partial}{\partial a}f(a,a^\dagger):. \tag{1.7}$$

这也来源于性质(1). 对于多模情况,上式可作如下推广:

$$:\frac{\partial}{\partial a_i}\frac{\partial}{\partial a_j}f(a_i,a_j,a_i^\dagger,a_j^\dagger): = [[:f(a_i,a_j,a_i^\dagger,a_j^\dagger):,a_j^\dagger],a_i^\dagger]. \tag{1.8}$$

(7) 正规乘积算符 $:f(a,a^\dagger):$ 的相干态矩阵元为

$$\langle z|:f(a^\dagger,a):|z'\rangle = f(z^*,z')\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(|z|^2+|z'|^2)+z^*z'}. \tag{1.9}$$

(8) 真空投影算符 $|0\rangle\langle 0|$ 的正规乘积展开式是

$$|0\rangle\langle 0| = :\exp(-a^\dagger a):. \tag{1.10}$$

下面给出其严格证明,设 $|0\rangle\langle 0| = :W:$,($W$ 待定),由粒子态 $|n\rangle = \frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle$ 完备性可得

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| = \sum_{n,m=0}^{\infty}|n\rangle\langle m|\frac{1}{\sqrt{n!m!}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^*}\right)^n z^{*m}\Big|_{z^*=0} \\
&= \mathrm{e}^{a^\dagger\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^*}}|0\rangle\langle 0|\mathrm{e}^{z^*a}\Big|_{z^*=0} \\
&= :\mathrm{e}^{a^\dagger\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z^*}}W\mathrm{e}^{z^*a}:\Big|_{z^*=0} \\
&= :\mathrm{e}^{a^\dagger a}W: = :\mathrm{e}^{a^\dagger a}:W::,
\end{aligned} \tag{1.11}$$

即 $|0\rangle\langle 0| = :\mathrm{e}^{-a^\dagger a}:$ 成立(值得提到的是,在文献[15]中,Louisell 曾给出 $|0\rangle\langle 0| = \lim\limits_{\varepsilon\to 1}:\mathrm{e}^{-\varepsilon a^\dagger a}:$). 利用这个关系,可得

$$\begin{aligned}
\hat{N}(\hat{N}-1)\cdots(\hat{N}-l+1) &= \sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-l+1)|n\rangle\langle n| \\
&= \sum_{n=l}^{\infty}:\frac{a^{\dagger n}a^n}{(n-l)!}\mathrm{e}^{a^\dagger a}: \\
&= a^{\dagger l}a^l,
\end{aligned} \tag{1.12}$$

以及

$$|0\rangle\langle 0| = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l a^{\dagger l} a^l}{l!}$$
$$= 1 - \hat{N} + \frac{1}{2!}\hat{N}(\hat{N}-1) - \frac{1}{3!}\hat{N}(\hat{N}-1)(\hat{N}-2) + \cdots. \tag{1.13}$$

也可以利用粒子数的完备性$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = 1$，给出算符恒等式

$$\begin{aligned} e^{\lambda a^\dagger a} &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda n} |n\rangle\langle n| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda n} \frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} |0\rangle\langle 0| \frac{a^n}{\sqrt{n!}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} :\frac{(e^\lambda a^\dagger a)^n}{n!} e^{-a^\dagger a}: \\ &= :\exp[(e^\lambda - 1)a^\dagger a]:. \end{aligned} \tag{1.14}$$

(9) 可以对正规乘积 :: 内部的 $c$ 数进行积分或微分运算，只要该积分收敛. 这是因为由性质(1)，内部的 $a^\dagger$与 $a$ 可以作为积分参量.

由性质(8) 与(9) 就联想到，只要能将 ket-bra 型的投影算符(形如$\int dx\ |f(x)\rangle\langle x|$，$\int dx\ |x,t\rangle\langle x,0|$) 化成正规乘积形式，则由于在 :: 内部的玻色算符都对易，可被看作积分参数，就可以实现对真实的 $c$ 数积分. 当然，在积分中和在积分后都存在 ::. 如果将最后结果的算符排成正规乘积形式，就可以将 :: 记号去掉. 我们称此技术为正规乘积内的积分技术，它是IWOP技术的一种. 除了这种正规乘积内的积分技术，后面还要讲到反正规乘积(用$\vdots\vdots$标记) 算符内、Weyl 编序乘积(用$\vdots\ \vdots$标记) 算符内的积分技术. 类似地，对于费米系统也有费米算符相对应的 IWOP 技术.

## 1.3 用IWOP技术和正态分布讨论量子力学基本表象

谈到表象,通俗的说法是指可将量子客体充分展示的某个完备基,不同的完备基中展示的形式不同,这对于全面了解客体的性质是必要的.量子力学的描述方式有两种选择,一是薛定谔的波函数(实际上是态矢在某个表象中的投影),另一是海森伯的算符(可观察量).因此,我们可以选择找力学量(算符)的完备基(例如任何$2\times 2$矩阵都可用3个Pauli矩阵和一个单位矩阵展开;又例如密度算符$\mathrm{tr}\rho=1$也可以认为是一种完备性)作为研究表象的出发点.找一个定义在$x-p$相空间的算符作为基矢量,记为$\Delta(x,p)$,它满足完备性

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\mathrm{d}p\Delta(x,p)=1, \tag{1.15}$$

**这里积分限量从$-\infty$到$+\infty$,以下相同,均省略.** 因此任意算符$\hat{H}$都可以用$\Delta(x,p)$展开

$$\hat{H}(\hat{X},\hat{P})=\int\mathrm{d}x\mathrm{d}ph(x,p)\Delta(x,p). \tag{1.16}$$

从式(1.15)联想到数理统计学中常见的二维随机变量的连续型正态分布密度函数[16]

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right], \tag{1.17}$$

式中:$\sigma_1,\sigma_2,\mu_1,\mu_2$均为参数,且$\sigma_1>0,\sigma_2>0$,也满足完备性$\int\mathrm{d}x\mathrm{d}yf(x,y)=1$,因此,我们就取在正规乘积内的算符函数

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}:\exp\left[-\frac{(x-\hat{X})^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(p-\hat{P})^2}{2\sigma_2^2}\right]: \tag{1.18}$$

作为完备基的基矢.之所以取正规乘积是因为考虑到坐标算符$\hat{X}$

与动量算符 $\hat{P}$ 是不对易的，即$[\hat{X},\hat{P}]=\mathrm{i}\hbar$，而它们在正规乘积∶∶内部是可以交换的，可看作为参数. 故由 IWOP 技术易证

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}p :\exp\left[-\frac{(x-\hat{X})^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(p-\hat{P})^2}{2\sigma_2^2}\right]:=1, \tag{1.19}$$

而且$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}:\exp\left[-\frac{(x-\hat{X})^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(p-\hat{P})^2}{2\sigma_2^2}\right]:$本身在给定 $\sigma_1,\sigma_2$ 以确定的物理意义以后，也可代表某种密度算符，关于这一点以后再叙述. 取 $\sigma_1=\sigma_2=1/\sqrt{2}$ 的情况，式(1.18)变为

$$\frac{1}{\pi}:\exp[-(x-\hat{X})^2-(p-\hat{P})^2]:\equiv\Delta(x,p). \tag{1.20}$$

这是最简单的正态分布形式. 我们把它作为力学量(算符)的完备性来研究量子力学的基本表象. 以后将说明 $\Delta(x,p)$ 正是 Wigner 算符.

### 1.3.1 坐标、动量表象的自然出现

对 $\Delta(x,p)$ 沿 $p$ 方向作单侧积分有

$$\int\Delta(x,p)\mathrm{d}p=\frac{1}{\sqrt{\pi}}:\mathrm{e}^{-(x-\hat{X})^2}:, \tag{1.21}$$

沿 $x$ 方向的单侧积分有

$$\int\Delta(x,p)\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{\pi}}:\mathrm{e}^{-(p-\hat{P})^2}:. \tag{1.22}$$

若用湮灭算符 $a$ 和产生算符 $a^\dagger$ 来定义 $\hat{X}$ 与 $\hat{P}$(为方便起见，取自然单位 $m=\omega=\hbar=1$)

$$\hat{X}=\frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}},\quad \hat{P}=\frac{a-a^\dagger}{\mathrm{i}\sqrt{2}}. \tag{1.23}$$

再根据正规乘积的性质以及 $:\mathrm{e}^{-a^\dagger a}:=|0\rangle\langle 0|$，式(1.21)的右边可化为

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} : e^{-(x-\hat{X})^2} :$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} : \exp\left[-x^2 + \sqrt{2}x(a^\dagger + a) - \frac{a^{\dagger 2} + a^2}{2} - a^\dagger a\right] :$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}xa^\dagger - \frac{a^{\dagger 2}}{2}\right) : e^{-a^\dagger a} : \exp\left(-\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}xa - \frac{a^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}xa^\dagger - \frac{a^{\dagger 2}}{2}\right) |0\rangle\langle 0| \exp\left(-\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}xa - \frac{a^2}{2}\right) \equiv |x\rangle\langle x|, \tag{1.24}$$

式中：

$$|x\rangle = \pi^{-1/4} \exp\left(-\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}xa^\dagger - \frac{a^{\dagger 2}}{2}\right)|0\rangle. \tag{1.25}$$

利用式(1.7) 与式(1.23) 以及 $a\,|0\rangle = 0$，发现 $a$ 作用到式(1.25) 会导致

$$\hat{X}\,|x\rangle = x\,|x\rangle. \tag{1.26}$$

这就说明式(1.25)恰恰是坐标本征态在Fock表象中的形式. 对式(1.24) 再作积分，易得坐标表象完备性

$$\int dx\,|x\rangle\langle x| = \int \frac{dx}{\sqrt{\pi}} : e^{-(x-\hat{X})^2} := 1. \tag{1.27}$$

这是完备性的纯 Guass 型积分形式. 这在以往的所有量子力学书中都未曾注意到的，使人想起宋代画家李唐的一首《题画》诗中的前两句：云里烟村雨里滩，看之容易作之难. 式(1.27) 的得出看似容易，而实际经历了半个世纪的过程. 用本征方程式(1.26) 与完备性式(1.27)，就有

$$\delta(x - \hat{X}) = |x\rangle\langle x|. \tag{1.28}$$

对于式(1.22)，同样地有

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} : \mathrm{e}^{-(p-\hat{P})^2} := |p\rangle\langle p| = \delta(p-\hat{P}), \tag{1.29}$$

式中

$$|p\rangle = \pi^{-1/4}\exp\left(-\frac{p^2}{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}pa^{\dagger}+\frac{a^{\dagger 2}}{2}\right)|0\rangle, \tag{1.30}$$

就是动量算符的本征态

$$\hat{P}\,|p\rangle = p\,|p\rangle. \tag{1.31}$$

注意当恢复 $m$,$\omega$ 和 $\hbar$ 后，$|x\rangle$ 和 $|p\rangle$ 的表达式应分别是

$$|x\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2+\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}xa^{\dagger}-\frac{a^{\dagger 2}}{2}\right)|0\rangle, \tag{1.32}$$

$$|p\rangle = \left(\frac{1}{\pi m\omega\hbar}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{p^2}{2m\omega\hbar}+\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{m\omega\hbar}}pa^{\dagger}-\frac{a^{\dagger 2}}{2}\right)|0\rangle. \tag{1.33}$$

可以证明$\langle x|$ 与 $|p\rangle$ 的内积是

$$\langle x|p\rangle = (2\pi\hbar)^{-1/2}\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}xp\right), \tag{1.34}$$

这恰是 Fourier(傅里叶) 变换的核.

另外,根据式(1.32) 与式(1.33),可以给出

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi\hbar}}\,|x\rangle = \left(\frac{1}{\pi m\omega\hbar}\right)^{1/4}\mathrm{e}^{\frac{a^{\dagger 2}}{2}}\,|0\rangle = |p=0\rangle, \tag{1.35}$$

表示所有坐标本征态的叠加等于动量为零的动量本征态. 类似地有

$$\int\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{2\pi\hbar}}\,|p\rangle = |x=0\rangle, \tag{1.36}$$

表示所有动量本征态的线性叠加(以相同的几率参与,表示动量值最不确定) 的效果等同于坐标值为零(确定的坐标值) 的坐标本征态. 这是符合海森伯不确定原理的. 容易验证式(1.35) 的正确性,即从其左边乘$\langle x'|$,得

$$\langle x'|\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi\hbar}}|x\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int\mathrm{d}x\delta(x-x')=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}},\tag{1.37}$$

其右边乘$\langle x'|$给出

$$\langle x'|p=0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x'p/\hbar}\Big|_{p=0}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}.\tag{1.38}$$

另一方面，由式(1.35)的两边同乘$\langle p|$，可得

$$\begin{gathered}\langle p|\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi\hbar}}|x\rangle=\frac{1}{2\pi\hbar}\int\mathrm{d}x\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}xp}=\delta(p),\\ \langle p|p=0\rangle=\delta(p).\end{gathered}\tag{1.39}$$

所以，式(1.35)是正确的. 由式(1.32)和式(1.33)分别看出

$$\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\int\mathrm{d}x\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)|x\rangle=|0\rangle,\tag{1.40}$$

$$\left(\frac{1}{\pi m\omega\hbar}\right)^{1/4}\int\mathrm{d}p\exp\left(-\frac{p^2}{2m\omega\hbar}\right)|p\rangle=|0\rangle.\tag{1.41}$$

由此导出关系

$$(m\omega)^{1/4}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}\hat{X}^2\right)\int\mathrm{d}x\,|x\rangle=(m\omega)^{-1/4}\exp\left(-\frac{\hat{P}^2}{2m\omega\hbar}\right)\int\mathrm{d}p|p\rangle.\tag{1.42}$$

再由式(1.35)与式(1.36)，得

$$(m\omega)^{1/4}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}\hat{X}^2\right)|p=0\rangle=(m\omega)^{-1/4}\exp\left(-\frac{\hat{P}^2}{2m\omega\hbar}\right)|x=0\rangle.\tag{1.43}$$

可以利用此关系式计算矩阵元

$$\begin{aligned}&\langle x=0|\exp\left(-\frac{\hat{P}^2}{2m\omega\hbar}\right)|x=0\rangle\\&=\sqrt{m\omega}\langle x=0|\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}\hat{X}^2\right)|p=0\rangle\\&=\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar}}.\end{aligned}\tag{1.44}$$

### 1.3.2 坐标-动量中介表象的自然引入

从上节讨论中，式(1.21) 与式(1.22) 可改写为

$$\int \Delta(x,p)\mathrm{d}p = |x\rangle\langle x|, \quad \int \Delta(x,p)\mathrm{d}x = |p\rangle\langle p|, \tag{1.45}$$

这称为 $\Delta(x,p)$ 的边缘分布. 但从 $|x\rangle\langle x|$ 或 $|p\rangle\langle p|$ 不能反过来知道 $\Delta(x,p)$ 的具体形式. 为此，在 $x-p$ 平面定义某条直线，根据平面解析几何知识，直线方程可用 $\delta(q-\mu x-\nu p)$ 标志($\mu,\nu$ 是实参数)，于是，将式(1.20) 中 $\Delta(x,p)$ 沿该任意直线积分，有

$$\begin{aligned}\rho &\equiv \int \mathrm{d}x\mathrm{d}p\delta(q-\mu x-\nu p)\Delta(x,p) \\ &= \int \mathrm{d}x\mathrm{d}p\delta(q-\mu x-\nu p)\,\frac{1}{\pi}:\mathrm{e}^{-(x-\hat{X})^2-(p-\hat{P})^2}: \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi(\mu^2+\nu^2)}}:\exp\left[-\frac{1}{\mu^2+\nu^2}(q-\mu\hat{X}-\nu\hat{P})^2\right]:,\end{aligned} \tag{1.46}$$

它也是一种正态分布. 根据式(1.23) 以及 $:\mathrm{e}^{-a^\dagger a}:=|0\rangle\langle 0|$，有

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{\sqrt{\pi(\mu^2+\nu^2)}}:\exp\left[-\frac{q^2}{\mu^2+\nu^2}+2q\frac{\mu\hat{X}+\nu\hat{P}}{\mu^2+\nu^2}-\frac{(\mu\hat{X}+\nu\hat{P})^2}{\mu^2+\nu^2}\right]: \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi(\mu^2+\nu^2)}}:\exp\left[-\frac{q^2}{\mu^2+\nu^2}+\frac{\sqrt{2}qa^\dagger}{\mu-\mathrm{i}\nu}-\frac{(\mu+\mathrm{i}\nu)a^{\dagger 2}}{2(\mu-\mathrm{i}\nu)}-\right. \\ &\qquad \left. a^\dagger a+\frac{\sqrt{2}qa}{\mu+\mathrm{i}\nu}-\frac{(\mu-\mathrm{i}\nu)a^2}{2(\mu+\mathrm{i}\nu)}\right]: \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi(\mu^2+\nu^2)}}\exp\left[-\frac{q^2}{2(\mu^2+\nu^2)}+\frac{\sqrt{2}qa^\dagger}{\mu-\mathrm{i}\nu}-\frac{(\mu+\mathrm{i}\nu)a^{\dagger 2}}{2(\mu-\mathrm{i}\nu)}\right] \\ &\qquad :\mathrm{e}^{-a^\dagger a}:\exp\left[-\frac{q^2}{2(\mu^2+\nu^2)}+\frac{\sqrt{2}qa}{\mu+\mathrm{i}\nu}-\frac{(\mu-\mathrm{i}\nu)a^2}{2(\mu+\mathrm{i}\nu)}\right] \\ &\equiv |q\rangle_{\mu,\nu\,\nu,\mu}\langle q|,\end{aligned} \tag{1.47}$$

式中：$|q\rangle_{\mu,\nu}$ 的具体形式为

$$|q\rangle_{\mu,\nu}=[\pi(\mu^2+\nu^2)]^{-\frac{1}{4}}\exp\left[-\frac{q^2}{2(\mu^2+\nu^2)}+\right.$$

$$\left.\frac{\sqrt{2}qa^\dagger}{\mu-\mathrm{i}\nu}-\frac{a^{\dagger 2}}{2}\frac{\mu+\mathrm{i}\nu}{\mu-\mathrm{i}\nu}\right]|0\rangle. \tag{1.48}$$

利用式(1.7) 以及 $a\ |0\rangle=0$,

$$a\ |q\rangle_{\mu,\nu}=\frac{1}{\nu+\mathrm{i}\mu}\left[\mathrm{i}\ \sqrt{2}q+(\nu-\mathrm{i}\mu)a^\dagger\right]|q\rangle_{\mu,\nu}, \tag{1.49}$$

再由式(1.23) 马上得到

$$(\mu\hat{X}+\nu\hat{P})\ |q\rangle_{\mu,\nu}=q\ |q\rangle_{\mu,\nu}, \tag{1.50}$$

即 $|q\rangle_{\mu,\nu}$ 是转动了的正交分量 $\mu\hat{X}+\nu\hat{P}$ 的本征态,也满足完备性

$$\int \mathrm{d}q\ |q\rangle_{\mu,\nu\ \nu,\mu}\langle q|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi(\mu^2+\nu^2)}}\int \mathrm{d}q :\exp\left\{-\frac{1}{\mu^2+\nu^2}[q-(\mu\hat{X}+\nu\hat{P})]^2\right\}:=1. \tag{1.51}$$

式(1.48) 是介于坐标本征态式(1.25) 及动量本征态式(1.30) 的一个态矢,当 $(\mu,\nu)=(1,0)$ 时,式(1.48) 变为坐标本征态式(1.25);而当 $(\mu,\nu)=(0,1)$ 时,它就变为动量本征态式(1.30). 所以称 $|q\rangle_{\mu,\nu}$ 是介于坐标表象与动量表象间的一种新表象. 这样,就用 IWOP 技术简捷地导出了坐标-动量中介表象[17,18].

坐标-动量中介表象的 Fock 表示.

根据 Hermite(厄米特) 多项式的母函数公式

$$\mathrm{e}^{2\lambda x-\lambda^2}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}\mathrm{H}_m(x), \tag{1.52}$$

将式(1.47) 展开为

$$|q\rangle_{\mu,\nu\ \nu,\mu}\langle q|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi(\mu^2+\nu^2)}}:\exp\left[-\frac{q^2}{\mu^2+\nu^2}+\frac{2q(\mu\hat{X}+\nu\hat{P})-(\mu\hat{X}+\nu\hat{P})^2}{\mu^2+\nu^2}\right]:$$

$$= \frac{\exp\left(-\frac{q^2}{\mu^2+\nu^2}\right)}{\sqrt{\pi(\mu^2+\nu^2)}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{H}_m\left(\frac{q}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\right)}{m!} : \left(\frac{\mu\hat{X}+\nu\hat{P}}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\right)^m : , \tag{1.53}$$

取其如下矩阵元：

$$\langle n|q\rangle_{\mu,\nu\,\nu,\mu}\langle q|0\rangle$$

$$= \frac{\exp\left(-\frac{q^2}{\mu^2+\nu^2}\right)}{\sqrt{\pi(\mu^2+\nu^2)}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{H}_m\left(\frac{q}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\right)}{m!} \langle n| \left[\frac{(\mu+\mathrm{i}\nu)a^\dagger}{\sqrt{2(\mu^2+\nu^2)}}\right]^m |0\rangle$$

$$= \frac{\exp\left(-\frac{q^2}{\mu^2+\nu^2}\right)}{\sqrt{\pi(\mu^2+\nu^2)n!}} \left[\frac{\mu+\mathrm{i}\nu}{\sqrt{2(\mu^2+\nu^2)}}\right]^n \mathrm{H}_n\left(\frac{q}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\right), \tag{1.54}$$

所以在坐标-动量中介表象中粒子数态波函数为

$$\langle n|q\rangle_{\mu,\nu} = \frac{\exp\left[-\frac{q^2}{2(\mu^2+\nu^2)}\right]}{[\pi(\mu^2+\nu^2)]^{1/4}\sqrt{n!}} \left(\frac{\mu+\mathrm{i}\nu}{\sqrt{2(\mu^2+\nu^2)}}\right)^n \mathrm{H}_n\left(\frac{q}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\right). \tag{1.55}$$

当$(\mu,\nu)=(1,0)$时，从上式得到

$$\langle x|n\rangle = \langle n|x\rangle = \mathrm{e}^{-x^2/2} \frac{\mathrm{H}_n(x)}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^n n!}}, \tag{1.56}$$

这就是坐标表象中光子数态波函数. 当$(\mu,\nu)=(0,1)$时，就有动量表象中光子数态波函数

$$\langle n|p\rangle = \mathrm{e}^{-p^2/2} \frac{\mathrm{i}^n \mathrm{H}_n(p)}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^n n!}}, \langle p|n\rangle = \mathrm{e}^{-p^2/2} \frac{(-\mathrm{i})^n \mathrm{H}_n(p)}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^n n!}}. \tag{1.57}$$

基于坐标-动量中介表象的 Tomography 理论[19,20].

另一方面，从本征方程式(1.50)及完备性关系式(1.51)，可得

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\mu\hat{X}+\nu\hat{P})} = \int \mathrm{d}q\, |q\rangle_{\mu,\nu\,\nu,\mu}\langle q|\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda q}$$

$$= \int \mathrm{d}x\mathrm{d}p\Delta(x,p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(\mu x+\nu p)}, \tag{1.58}$$

把式(1.58)右边看作是一个傅里叶变换,则其逆变换是

$$\Delta(x,p)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q'\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\lambda'\mid\lambda'\mid\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\,|q'\rangle_{\mu,\nu\nu,\mu}\langle q'|\cdot \exp\left[-\mathrm{i}\lambda'\left(\frac{q'}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}-x\cos\varphi-p\sin\varphi\right)\right], \tag{1.59}$$

式中:

$$\lambda'=\lambda\sqrt{\mu^2+\nu^2},\quad \cos\varphi=\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}},\quad \sin\varphi=\frac{\nu}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}. \tag{1.60}$$

所以从投影 $|q'\rangle_{\mu,\nu\nu,\mu}\langle q'|$ 反过来给出 Wigner 算符,或从 $\langle\psi|q'\rangle_{\mu,\nu\nu,\mu}\langle q'|\psi\rangle$ 重构 Wigner 函数,这就是 Tomography.

### 1.3.3 相干态表象的自然导出

由于受不确定原理的制约,坐标本征态 $|x\rangle$ 和动量本征态 $|p\rangle$ 都只是理想的态,它们都归一化为 $\delta$ 函数,因此其物理应用也有限,而相干态在近代物理中的应用要广泛得多.它不但是一个重要的物理概念,而且是理论物理中的一种有效的方法.例如:它可以非常自然地解释一个微观量子系统怎样能够表现出宏观的集体模式,从而给出量子力学的经典对应.在量子光学中,相干态是激光理论的重要支柱[21-23].相干态可以用来发展群表示论[24,25].目前,几乎物理学的各个领域都广泛地应用相干态.相干态这一物理概念,最初是由薛定谔在 1926 年提出.他指出:要在一个给定位势下找某个量子力学态,这个态遵从与经典粒子类似的规律.对于谐振子位势,他找到了这样的状态.但一直到 20 世纪 60 年代初才由 Glauber 和 Klauder 等人[21,26]系统地建立起谐振子相干态(或称为正则相干态),证明了它是谐振子湮灭算符的本征态,而且是使坐标-动量不确定关系取极小值的态.鉴于相干态有它的固有特点,例如,它是一个不正交的态,因此具有超完备性

(overcompleteness). 又例如，它是一个量子力学态，而又最接近于经典情况，因此人们对于相干态的研究与应用的兴趣与日俱增. 下面，用 IWOP 技术讨论相干态.

根据式(1.18)，若 $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ 时，则变为

$$\frac{1}{2\pi} : \exp\left[-\frac{(x-\hat{X})^2}{2} - \frac{(p-\hat{P})^2}{2}\right] :, \tag{1.61}$$

这也是一种正态分布函数形式. 再注意到 $\hat{X} = \frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}, \hat{P} = \frac{a-a^\dagger}{\mathrm{i}\sqrt{2}}$，根据 IWOP 技术，式(1.61) 可分解为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi} : \exp\left[-\frac{1}{2}(x^2+p^2) + \frac{1}{\sqrt{2}}(x+\mathrm{i}p)a^\dagger - a^\dagger a + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-\mathrm{i}p)a\right] : \\
&= \frac{1}{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}(x^2+p^2) + \frac{1}{\sqrt{2}}(x+\mathrm{i}p)a^\dagger\right] : \mathrm{e}^{-a^\dagger a} : \\
&\quad \exp\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x-\mathrm{i}p)a\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{4}(x^2+p^2) + \frac{1}{\sqrt{2}}(x+\mathrm{i}p)a^\dagger\right]|0\rangle\langle 0| \\
&\quad \exp\left[-\frac{1}{4}(x^2+p^2) + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-\mathrm{i}p)a\right] \\
&\equiv \frac{1}{2\pi}\,|x,p\rangle\langle x,p|,
\end{aligned} \tag{1.62}$$

式中：

$$|x,p\rangle = \exp\left[-\frac{1}{4}(x^2+p^2) + \frac{1}{\sqrt{2}}(x+\mathrm{i}p)a^\dagger\right]|0\rangle, \tag{1.63}$$

这就是正则相干态形式. 从式(1.19)，易导出它的超完备性

$$\int \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}x}{2\pi}\,|x,p\rangle\langle x,p| = 1. \tag{1.64}$$

坐标算符 $\hat{X}$ 与动量算符 $\hat{P}$ 在 $|x,p\rangle$ 的期望值分别是

$$\langle x,p|\ \hat{X}\ |x,p\rangle = x,\quad \langle x,p|\ \hat{P}\ |x,p\rangle = p. \tag{1.65}$$

可见,正则相干态形式的优点是提供了一个表象,这一表象把坐标算符 $\hat{X}$ 与动量算符 $\hat{P}$ 分别与它们的期望值 $x$ 和 $p$ 对应起来,这就启发我们,用正则相干态研究经典相空间中的正则变换如何向量子力学的希尔伯特空间中幺正算符的过渡是方便的.

从正则相干态 $|x,p\rangle$ 过渡到我们熟知的相干态 $|z\rangle$ 形式,令 $z=\dfrac{x+\mathrm{i}p}{\sqrt{2}}$,则式(1.63) 变为

$$\begin{aligned}|z\rangle \equiv |x,p\rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}\ |z\ |^2 + za^{\dagger}\right)|0\rangle \\ &= D(z)\ |0\rangle,\end{aligned} \tag{1.66}$$

式中:

$$D(z) = \mathrm{e}^{za^{\dagger}-z^{*}a} \tag{1.67}$$

为平移算符. 易证 $D(z)$ 满足关系

$$D(z)D(z') = D(z+z')\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(zz'^{*}-z^{*}z')}, \tag{1.68}$$

$$D(-z) = D^{-1}(z) = D^{\dagger}(z),\quad D^{-1}(z)aD(z) = a+z. \tag{1.69}$$

$|z\rangle$ 是无穷多个粒子数的叠加

$$|z\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{|z|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\ |n\rangle. \tag{1.70}$$

当用式(1.7) 以及 $a\ |0\rangle = 0$,便知 $|z\rangle$ 是湮灭算符 $a$ 的本征态:

$$a\ |z\rangle = z\ |z\rangle. \tag{1.71}$$

从式(1.64),可得相干态的超完备性的纯 Guass 积分形式:

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\ |z\rangle\langle z|\ &= \int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\ :\ \mathrm{e}^{-|z|^2+za^{\dagger}+z^{*}a-a^{\dagger}a}\ : \\ &= \int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\ :\ \mathrm{e}^{-(z-a)(z^{*}-a^{\dagger})}\ : \\ &= \int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\ :\ \mathrm{e}^{-|z|^2}\ := 1.\end{aligned} \tag{1.72}$$

相干态是不正交的，易证

$$\langle z|z'\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}(|z|^2+|z'|^2)+z^*z'\right]. \tag{1.73}$$

上式也可改写为

$$\langle x,p|x',p'\rangle$$
$$= \exp\left\{-\frac{1}{4}[(x-x')^2+(p-p')^2]+\frac{\mathrm{i}}{2}(px'-xp')\right\}. \tag{1.74}$$

根据式(1.25)，式(1.30) 以及式(1.71)，得到相干态的波函数为

$$\langle x|z\rangle = \pi^{-1/4}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}|z|^2+\sqrt{2}qz-\frac{z^2}{2}\right), \tag{1.75}$$

$$\langle p|z\rangle = \pi^{-1/4}\exp\left(-\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{2}|z|^2-\mathrm{i}\sqrt{2}pz+\frac{z^2}{2}\right). \tag{1.76}$$

也可验证坐标本征态的正交归一性，由式(1.72) 与式(1.75) 得

$$\begin{aligned}\langle x'|x\rangle &= \pi^{-1/2}\mathrm{e}^{-\frac{x'^2+x^2}{2}}\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\exp\Big[-|z|^2+\\&\qquad\sqrt{2}(x'z+xz^*)-\frac{1}{2}(z^2+z^{*2})\Big]\\&= \pi^{-1/2}\mathrm{e}^{-\frac{x'^2+x^2}{2}}\lim_{t\to1}\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\exp\Big[-|z|^2+\\&\qquad\sqrt{2}(x'z+xz^*)-\frac{t}{2}(z^2+z^{*2})\Big]\\&= \pi^{-1/2}\mathrm{e}^{-\frac{x'^2+x^2}{2}}\lim_{t\to1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\exp\left[\frac{2xx't-(x'^2+x^2)t^2}{1-t^2}\right]\\&= \delta(x'-x).\end{aligned} \tag{1.77}$$

同理，也可证明动量本征态的正交归一性.

利用式(1.72) 与 IWOP 技术，很容易重现著名的 Baker-Hausdorff 公式，即

$$e^{\lambda a}e^{\lambda' a^\dagger} = \int \frac{d^2 z}{\pi} :\exp[-|z|^2 + z(a^\dagger + \lambda) + z^*(a + \lambda') - a^\dagger a]:$$
$$= e^{\lambda' a^\dagger}e^{\lambda a}e^{\lambda\lambda'}. \tag{1.78}$$

此外，

$$f(a)e^{-\lambda a^\dagger} = \int \frac{d^2 z}{\pi} : f(z)\exp[-|z|^2 + za^\dagger + z^*(a-\lambda) - a^\dagger a]:$$
$$= e^{-\lambda a^\dagger} f(a-\lambda), \tag{1.79}$$

$$f(a)e^{-\lambda a^\dagger a} = e^{\lambda}\int \frac{d^2 z}{\pi} : f(z)\exp(-e^{\lambda}|z|^2 + za^\dagger + z^* a - a^\dagger a):$$
$$= e^{-\lambda a^\dagger a} f(ae^{-\lambda}). \tag{1.80}$$

同样地，有

$$e^{-\lambda a^\dagger a} f(a^\dagger) = f(a^\dagger e^{-\lambda})e^{-\lambda a^\dagger a}. \tag{1.81}$$

利用式(1.14)与积分公式

$$\int \frac{d^2 z}{\pi}\exp(\zeta|z|^2 + \xi z + \eta z^* + fz^2 + gz^{*2})$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 4fg}}\exp\left[\frac{-\zeta\xi\eta + \xi^2 g + \eta^2 f}{\zeta^2 - 4fg}\right], \tag{1.82}$$

收敛性要求其满足 $\mathrm{Re}(\zeta + f + g) < 0, \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta^2 - 4fg}{\zeta + f + g}\right) < 0$，或者 $\mathrm{Re}(\zeta - f - g) < 0, \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta^2 - 4fg}{\zeta - f - g}\right) < 0$，还有

$$e^{fa^2}e^{ga^{\dagger 2}}$$
$$= \int \frac{d^2 z}{\pi} :\exp(-|z|^2 + za^\dagger + z^* a + fz^2 + gz^{*2} - a^\dagger a):$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-4fg}}\exp\left(\frac{ga^{\dagger 2}}{1-4fg}\right)\exp[-a^\dagger a\ln(1-$$
$$4fg)]\exp\left(\frac{fa^2}{1-4fg}\right), \tag{1.83}$$

以及

$$e^{fa}e^{ga^{\dagger 2}} = \int \frac{d^2 z}{\pi} :\exp[-|z|^2 + z(a^\dagger + f) + z^* a + gz^{*2} - a^\dagger a]:$$

$$= e^{gf^2} e^{ga^{\dagger 2}+2gfa^\dagger} e^{fa}. \tag{1.84}$$

式(1.83)可用于研究对压缩态的量子调控.

## 1.4 有趣的 Dirac 符号的积分 —— 压缩算符

根据上述算符函数的积分思想,可具体处理 ket-bra 型积分 $\sqrt{\mu}\int \mathrm{d}p\ |\mu p\rangle\langle p|$,其中 $|p\rangle$ 是动量本征态,看是否能使原有的 Dirac 表象理论更实用,更完美. 现利用式(1.30),有

$$S_1 \equiv \sqrt{\mu}\int \mathrm{d}p\ |\mu p\rangle\langle p|$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\int \mathrm{d}p \exp\left(-\frac{\mu^2 p^2}{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}\mu p a^\dagger + \frac{a^{\dagger 2}}{2}\right)|0\rangle\langle 0| \exp\left(-\frac{p^2}{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}pa + \frac{a^2}{2}\right), \tag{1.85}$$

把 $|0\rangle\langle 0| = :\mathrm{e}^{-a^\dagger a}:$ 代入,得

$$S_1 = \sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\int \mathrm{d}p \exp\left(-\frac{\mu^2 p^2}{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}\mu p a^\dagger + \frac{a^{\dagger 2}}{2}\right) : \mathrm{e}^{-a^\dagger a} : \exp\left(-\frac{p^2}{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}pa + \frac{a^2}{2}\right). \tag{1.86}$$

可以看出,在 $:\mathrm{e}^{-a^\dagger a}:$ 的左边是产生算符函数,右边是湮灭算符函数. 根据前面的性质,整个被积的算符函数已经是正规乘积形式,所以可将左边的 : 移到第一个函数前;将右边的 : 移到第三个 exp 函数后. 根据性质(1)在 :: 内所有玻色子算符相互对易,就可以将三个 exp 函数进行指数上的普通加法,这样就实现了算符积分函数的 $c$ 数化. 于是式(1.86)写成

$$S_1 = \sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\int \mathrm{d}p : \exp\left[-\frac{\mu^2+1}{2}p^2 + \mathrm{i}\ \sqrt{2}p(\mu a^\dagger - a) + \frac{1}{2}(a^\dagger - a)^2\right]:, \tag{1.87}$$

现在 :: 内 $a$ 和 $a^\dagger$ 是对易的,可被视为普通积分参数,利用 IWOP 技

术积分得

$$S_1 = \operatorname{sech}^{1/2}\lambda : \exp\left[-\frac{a^{\dagger 2}}{2}\tanh\lambda + (\operatorname{sech}\lambda - 1)a^\dagger a + \frac{a^2}{2}\tanh\lambda\right]:, \tag{1.88}$$

式中：

$$e^\lambda = \mu, \quad \operatorname{sech}\lambda = \frac{2\mu}{1+\mu^2}, \quad \tanh\lambda = \frac{\mu^2-1}{1+\mu^2}. \tag{1.89}$$

若要去掉式(1.88)中的记号：：，可以利用式(1.14)得到压缩算符

$$S_1 = \exp\left(-\frac{a^{\dagger 2}}{2}\tanh\lambda\right)\exp\left[\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\ln\operatorname{sech}\lambda\right]\exp\left(\frac{a^2}{2}\tanh\lambda\right), \tag{1.90}$$

说明经典变换 $p \to \mu p$ 用IWOP技术可映射出压缩算符，这是一个优美的方法.

上式两边对参数 $\lambda$ 求微商，并利用下列算符恒等式：

$$e^{\gamma a^{\dagger 2}} a = (a - 2\gamma a^\dagger)e^{\gamma a^{\dagger 2}}, \tag{1.91}$$

$$e^{\gamma a^{\dagger 2}} a^2 = (a^2 + 4\gamma^2 a^{\dagger 2} - 4\gamma a^\dagger a - 2\gamma)e^{\gamma a^{\dagger 2}}, \tag{1.92}$$

导出

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}S_1 = -\frac{\lambda}{2}(a^2 - a^{\dagger 2})S_1. \tag{1.93}$$

注意到边界条件是 $S_1|_{\lambda=0} = 1$，因此式(1.93)的解为

$$S_1 = \exp\left[-\frac{\lambda}{2}(a^2 - a^{\dagger 2})\right]. \tag{1.94}$$

根据式(1.90)的结果，易得

$$S_1|0\rangle = \operatorname{sech}^{1/2}\lambda\exp\left(-\frac{a^{\dagger 2}}{2}\tanh\lambda\right)|0\rangle, \tag{1.95}$$

这就是单模压缩真空态. 另外，由动量本征态的完备性，有

$$S_1|p\rangle = \sqrt{\mu}\,|\mu p\rangle, \quad S_1^\dagger|p\rangle = 1/\sqrt{\mu}\,|p/\mu\rangle, \tag{1.96}$$

故知 $S_1 \equiv \sqrt{\mu}\int dp\,|\mu p\rangle\langle p|$ 为单模压缩算符，且有如下性质：

(1) 幺正性. 根据 $\langle p|p'\rangle = \delta(p-p')$，则

$$S_1 S_1^\dagger = \mu\int \mathrm{d}p\mathrm{d}p' \ |\mu p\rangle\langle\mu p'| \ \delta(p-p')$$
$$= \int \mathrm{d}p \ |p\rangle\langle p| = 1 = S_1^\dagger S_1. \qquad (1.97)$$

(2) 压缩性. 利用算符恒等式

$$\mathrm{e}^{\hat{A}}\hat{B}\mathrm{e}^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A},\hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + \frac{1}{3!}[\hat{A},[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]] + \cdots, \qquad (1.98)$$

诱导出压缩变换

$$S_1 a S_1^\dagger = a\cosh\lambda + a^\dagger \sinh\lambda,$$
$$S_1 a^\dagger S_1^\dagger = a^\dagger \cosh\lambda + a\sinh\lambda, \qquad (1.99)$$

这就是著名的 Bogolyubov 变换(也称为压缩变换)[27],它被广泛地应用于量子光学、超导理论和原子核理论中. 上述讨论表明用 Dirac 的动量本征态按式(1.85)构造算符,并用 IWOP 技术积分后就给出诱导 Bogolyubov 变换的幺正算符,即在经典相空间中的尺度变换 $|p\rangle \to |\mu p\rangle$ 能够映射出量子幺正变换 $S_1 \hat{X} S_1^\dagger = \mu\hat{X}$, $S_1 \hat{P} S_1^\dagger = \hat{P}/\mu$. 事实上,用 Dirac 的坐标本征态也构造出单模压缩算符[28]:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mu}} \left|\frac{x}{\mu}\right\rangle\langle x| = \exp\left[-\frac{\lambda}{2}(a^2 - a^{\dagger 2})\right]. \qquad (1.100)$$

若经典相空间作如下的正则变换 $x_1 \to x_1\cosh\lambda + x_2\sinh\lambda$, $x_2 \to x_2\cosh\lambda + x_1\sinh\lambda$,则可以映射出双模压缩算符. 记双模坐标本征态是 $|x_1, x_2\rangle = |x_1\rangle|x_2\rangle$,构造如下积分型算符并用 IWOP 技术积分

$$S_2 = \int \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \ |x_1\cosh\lambda + x_2\sinh\lambda, x_2\cosh\lambda + x_1\sinh\lambda\rangle\langle x_1, x_2|$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2}{\pi} : \exp[-(x_1^2 + x_2^2)\cosh^2\lambda - x_1x_2\sinh 2\lambda +$$
$$\sqrt{2}(x_1\cosh\lambda + x_2\sinh\lambda)a_1^\dagger + \sqrt{2}(x_2\cosh\lambda + x_2\sinh\lambda)a_2^\dagger +$$

$$\sqrt{2}(x_1a_1+x_2a_2)-\frac{1}{2}(a_1^\dagger+a_1)^2-\frac{1}{2}(a_2^\dagger+a_2)^2\Big]:$$

$$=\operatorname{sech}\lambda:\exp[(a_1^\dagger a_2^\dagger-a_1a_2)\tanh\lambda+(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2)(\operatorname{sech}\lambda-1)]:, \tag{1.101}$$

其中:用了双模真空态的正规乘积展开形式

$$|00\rangle\langle 00|=:\mathrm{e}^{-a_1^\dagger a_1-a_2^\dagger a_2}:. \tag{1.102}$$

借助恒等式(1.14),得

$$S_2=\exp(a_1^\dagger a_2^\dagger\tanh\lambda)\exp[(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2+1)\ln\operatorname{sech}\lambda]\exp(-a_1a_2\tanh\lambda), \tag{1.103}$$

其能诱导出下列的双模压缩变换

$$S_2a_1S_2^{-1}=a_1\cosh\lambda-a_2^\dagger\sinh\lambda, \tag{1.104}$$

$$S_2a_2S_2^{-1}=a_2\cosh\lambda-a_1^\dagger\sinh\lambda. \tag{1.105}$$

根据式(1.103),如果 $S_2$ 作用于真空态 $|00\rangle$,就得到双模压缩真空态

$$S_2|00\rangle=\operatorname{sech}\lambda\exp(a_1^\dagger a_2^\dagger\tanh\lambda)|00\rangle. \tag{1.106}$$

这些例子都表明了:Dirac 的符号是可以用 IWOP 技术积分的,构造有物理意义的 ket-bra 积分式并积分之,就可以从 Dirac 的基本表象出发构造出许多量子力学幺正变换,从而定义新的量子力学态矢.

此外,利用 IWOP 技术导出一些有名的幺正算符,如利用式(1.25) 与式(1.30),对下列 ket-bra 积分有

$$\int\mathrm{d}x\,|x\rangle\langle p||_{p=x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\mathrm{d}x:\exp\Big[-x^2+\sqrt{2}(a^\dagger-\mathrm{i}a)x+\frac{1}{2}(a^2-a^{\dagger 2})-a^\dagger a\Big]:$$

$$=:\exp[-(1+\mathrm{i})a^\dagger a]:$$

$$=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\hat{N}}, \tag{1.107}$$

式中:$\hat{N}=a^\dagger a$ 为粒子数算符. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\hat{N}}$ 就是将坐标表象转变为具有相同值的动量表象的幺正算符,即

$$e^{i\frac{\pi}{2}\hat{N}}\ |x\rangle = |p\rangle|_{p=x},\quad e^{i\frac{\pi}{2}\hat{N}}\ |p\rangle = |-x\rangle|_{x=p},\tag{1.108}$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}\hat{N}}\hat{X}e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{N}} = \hat{P},\quad e^{i\frac{\pi}{2}\hat{N}}\hat{P}e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{N}} = -\hat{X}.\tag{1.109}$$

还可以在相干态表象构造不对称 ket-bar 算符，如

$$\begin{aligned}&\int\frac{d^2 z}{\pi}\ |z\rangle\langle\mu z|\\&=\int\frac{d^2 z}{\pi}:\exp\left[-\frac{|z|^2}{2}(1+|\mu|^2)+za^\dagger+z^*\mu^* a-a^\dagger a\right]:\\&=\frac{2}{1+|\mu|^2}:\exp\left[\left(\frac{2\mu^*}{1+|\mu|^2}-1\right)a^\dagger a\right]:.\end{aligned}\tag{1.110}$$

当取 $\mu = e^{\lambda}$ 时，式(1.110) 就变为

$$\int\frac{d^2 z}{\pi}\ |z\rangle\langle\mu z| = \mu^{-1}\exp[(1+a^\dagger a)\ln\operatorname{sech}\lambda].\tag{1.111}$$

当取 $\mu = e^{-i\phi}$ 时，式(1.110) 就变为

$$e^{i\phi\hat{N}} = \int\frac{d^2 z}{\pi}\ |z\rangle\langle e^{-i\phi}z|,\tag{1.112}$$

进而，若 $\mu = 1$，则 $\phi = \pi$，即

$$e^{i\pi\hat{N}} = \int\frac{d^2 z}{\pi}\ |z\rangle\langle -z|,\tag{1.113}$$

这就是宇称算符. 在坐标表象与动量表象，也有

$$e^{i\pi\hat{N}} = \int dx\ |x\rangle\langle -x| = \int dp\ |p\rangle\langle -p|,\tag{1.114}$$

因此

$$e^{i\pi\hat{N}}\ |z\rangle = |-z\rangle,\ e^{i\pi\hat{N}}\ |x\rangle = |-x\rangle,\ e^{i\pi\hat{N}}\ |p\rangle = |-p\rangle.\tag{1.115}$$

以上例子都表明，原来 Dirac 创造的符号是可以积分的，我们十分佩服 Dirac 的远见，即“它本身的数学得到发展时，它将更多地被人们所采用.”这一事实也使我们想起 Dirac 的另一段话：“……一旦有了发现，它往往显得那么明显，以致人们奇怪为什么以前会没有人想到它.”创造者只记得最终的解决问题的最简易有效的方法，那些失败和犯错的经历，那些 awkward 方法，都随着时间的

推移而淡出了脑海. 作者回想虽然从 1966 年起就注意到这类积分,摸索了十几年才找到了解决的途径,深深体会到作为一个科研工作者,如在崎岖的科研小道上知难而退,就会有"浅尝辄止"的羞愧,王安石在"游褒禅山记"写道"世之奇伟鬼怪非常之观,常在于险远而人之所罕至焉,故非有志者不能至也". 也使人追忆王安石的一副对联:"看似寻常最奇崛,成如容易却艰辛."

读者会注意到式(1.90)中$\frac{a^{\dagger 2}}{2}, \frac{a^2}{2}, a^\dagger a+\frac{1}{2}$以及式(1.103)中$a_1^\dagger a_2^\dagger, a_1 a_2, a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2+1$恰好都构成$SU(1,1)$李代数,这是一种自然之美. 不少人有认识误区,以为数学推导是枯燥的,而以上我们的推导表明对于Dirac符号的积分是有趣的. 表现出学术性和艺术性的统一,这就是美之所在. 狄拉克曾经说:"研究人员以数学形式表达自然基本规律时应该努力做到数学优美,他应该把数学的简洁放在优美的从属地位. 简洁与优美的要求往往是同时发生的,但是在它们不调和的地方,应该首先考虑后者."所以理论物理学工作者的论文作品应以天籁为贵.

## 1.5 一维高斯扰动的能级修正

一个量子谐振子的哈密顿量 $\hat{H}_0=\left(a^\dagger a+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ 的能级及其相应的本征态为

$$E_n^{(0)}=\langle n|\hat{H}_0|n\rangle=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \tag{1.116}$$

$$\Psi_n^{(0)}(q)=N_n e^{-\frac{\alpha^2 q^2}{2}}H_n(\alpha q), \tag{1.117}$$

式中:$n=0,1,2,\cdots$, 归一化系数为 $N_n=\left[\frac{\alpha^2}{2^{2n}\pi(n!)^2}\right]^{1/4}$, $\alpha=\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}$. $H_n(\alpha q)$ 是 Hermite 多项式

$$\mathrm{H}_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\xi^n} e^{-\xi^2} = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^n n!}{k!(n-k)!}(2\xi)^{n-2k}. \tag{1.118}$$

当谐振子受到一高斯微扰 $\hat{H}' = e^{\lambda \hat{X}^2}$ $(\lambda < 0)$，则总哈密顿算符为

$$\hat{H}_1 = \hat{H}_0 + \epsilon \hat{H}', \tag{1.119}$$

其中：$\epsilon$是非常小的，足以保证$\epsilon\hat{H}'$ 是一个小扰动.

利用坐标本征态 $|x\rangle$ 的完备性高斯积分形式，直接导出 $e^{\lambda\hat{X}^2}$ 的正规乘积形式，即

$$\begin{aligned} e^{\lambda\hat{X}^2} &= e^{\lambda\hat{X}^2} \int \mathrm{d}x \, |x\rangle\langle x| \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \mathrm{d}x e^{\lambda x^2} : \exp[-(x-\hat{X})^2] : \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} : \exp\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\hat{X}^2\right):. \end{aligned} \tag{1.120}$$

将其作用到真空态 $|0\rangle$ 上，就有

$$e^{\lambda\hat{X}^2}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \exp\left[\frac{\lambda}{2(1-\lambda)} a^{\dagger 2}\right]|0\rangle. \tag{1.121}$$

这是一个单模压缩态. 将式(1.121) 进行展开，就得到基态的有关 $\lambda$ 的一级修正

$$|0\rangle + \frac{\lambda}{2}|0\rangle + \sqrt{2}|2\rangle. \tag{1.122}$$

原则上，由式(1.121) 可得到基态的有关 $\lambda$ 的 $n$ 级修正表示式. 基于式(1.120)，我们就有在相干态 $|z\rangle$ 表象中的矩阵元

$$\begin{aligned} \langle z'| e^{\lambda\hat{X}^2} |z\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \langle z'| : \exp\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\hat{X}^2\right) : |z\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \exp\left[\frac{\lambda(z+z'^*)^2}{2(1-\lambda)} - \frac{|z|^2 + |z'|^2 - 2zz'^*}{2}\right], \end{aligned} \tag{1.123}$$

这里已利用两相干态的内积式(1.73). 利用式(1.123) 和相干态

的超完备性$\int \frac{d^2 z}{\pi} |z\rangle\langle z| = 1$以及下列的数学积分公式

$$\int \frac{d^2 z}{\pi} z^k z^{*n} e^{\lambda|z|^2+bz} = (-1)^{n+1}\lambda^{-(n+1)} \frac{n!}{(n-k)!} b^{n-k}, (\mathrm{Re}\lambda < 0, k \leqslant n) \tag{1.124}$$

$$\int \frac{d^2 z}{\pi} z^k z^{*n} e^{\lambda|z|^2} = (-1)^{k+1}\lambda^{-(k+1)} k!\delta_{nk}, \tag{1.125}$$

能导出在 Fock 态 $|n\rangle$ 表象中的高斯微扰矩阵元

$$\begin{aligned}\langle n'|\ \hat{H}'\ |n\rangle &= \int \frac{d^2 z d^2 z'}{\pi^2} \langle n'|z'\rangle\langle z'|\ \hat{H}'\ |z\rangle\langle z|n\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda)n'!n!}} \int \frac{d^2 z d^2 z'}{\pi^2} z'^{n'} z^{*n} \exp\Big[-|z|^2 - \\ &\quad |z'|^2 + \frac{\lambda(z^2 + z'^{*2}) + 2zz'^{*}}{2(1-\lambda)}\Big] \\ &= \frac{1}{(1-\lambda)^{\frac{n'+n+1}{2}}} \sum_{s=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{\sqrt{n'!n!}\lambda^{2s+\frac{n'-n}{2}}}{2^{2s+\frac{n'-n}{2}} s!(n-2s)!\left(\frac{n'-n}{2}+s\right)!},\end{aligned} \tag{1.126}$$

式中：$\frac{n'-n}{2}+s$ 必须是一个正整数，这就给出选择定则 $n' = n \pm 2k$. 特别当 $n = n'$ 时，式(1.126) 变为

$$\langle n|\ \hat{H}'\ |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)^{n/2} P_n\left(\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right), \tag{1.127}$$

式中：$P_n(x)$ 是 Legendre 多项式，它的定义为

$$P_n(x) = x^n \sum_{s=0}^{[n/2]} \frac{n!}{2^{2s}(s!)^2(n-2s)!}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^s \tag{1.128}$$

当 $n = n'$，还得到量子谐振子的能量本征值 $E_n^{(0)}$ 受高斯微扰后的一级修正的表达式

$$E_n^{(1)} = \epsilon\langle n'|\ \hat{H}'\ |n\rangle = \frac{n!\epsilon}{(1-\lambda)^{n+1/2}} \sum_{s=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{\lambda^{2s}}{2^{2s}(s!)^2(n-2s)!} \tag{1.129}$$

式(1.129) 是一个精确的结果,没有任何近似. 对于一些特殊情况,有

$$\langle n|\ \hat{H}'\ |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}},\quad n = 0 \tag{1.130}$$

接下来,我们给出式(1.120) 的另一表式.

注意到拉盖尔(Laguerre) 多项式

$$L_n^{\alpha}(x) = \sum_k \binom{\alpha+n}{n-k}\frac{(-x)^k}{k!}$$

的母函数公式为

$$(1-t)^{-\alpha-1}\exp\left(\frac{xt}{t-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x)t^n, \tag{1.131}$$

就可把式(1.120) 表为简洁的形式

$$e^{\lambda\hat{X}^2} = :\sum_{n=0}^{\infty} L_n{}^{-1/2}(-\hat{X}^2)\lambda^n: \tag{1.132}$$

其中:求和上标符号(′) 表示求和除了 $n' = n$ 项外.

## 1.6 多模指数算符的正规乘积形式

把量子力学表象的完备性改写为正规乘积的纯高斯型积分形式. 有助于导出多模指数算符的正规乘积形式[29].

例如,利用式(1.72) 与式(1.102) 以及 IWOP 技术可以得到算符 $\exp(fa_1a_2)\exp(ga_1^\dagger a_2^\dagger)$ 的正规乘积形式,即

$$\begin{aligned}
e^{fa_1a_2}e^{ga_1^\dagger a_2^\dagger} &= \int\frac{d^2z_1d^2z_2}{\pi^2}e^{fa_1a_2}\ |z_1z_2\rangle\langle z_1z_2|\ e^{ga_1^\dagger a_2^\dagger} \\
&= \int\frac{d^2z_1d^2z_2}{\pi^2}:\exp(-|z_1|^2-|z_2|^2+z_1a_1^\dagger+z_2a_2^\dagger- \\
&\quad a_1^\dagger a_1-a_2^\dagger a_2+z_1^*a_1+z_2^*a_2+fz_1z_2+gz_1^*z_2^*): \\
&= \frac{1}{1-fg}\exp\left(\frac{ga_1^\dagger a_2^\dagger}{1-fg}\right):\exp\left[\frac{fg(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2)}{1-fg}\right]: \\
&\quad \exp\left(\frac{fa_1a_2}{1-fg}\right),
\end{aligned} \tag{1.133}$$

这里积分要求 $\mathrm{Re}(1-fg)>0$,并已用了积分公式

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}\exp(-\xi|z|^2+\zeta z+\eta z^*)=\frac{1}{\xi}\exp\left(\frac{\zeta\eta}{\xi}\right),\quad \mathrm{Re}\xi>0. \tag{1.134}$$

用 IWOP 技术与式(1.72) 还可以方便地导出

$$\mathrm{e}^{a_i^\dagger \Omega_{ij} a_j}=:\exp[a_i^\dagger(\mathrm{e}^{\boldsymbol{\Omega}}-\boldsymbol{I})_{ij}a_j]: \tag{1.135}$$

式中:$\boldsymbol{I}$ 为 $n\times n$ 单位矩阵,这里的重复指标表示从 $1\rightarrow n$ 求和. 证明如下:记 $|Z\rangle$ 为 $n$ 模相干态,利用

$$\mathrm{e}^{a_i^\dagger \Omega_{ij} a_j}\, a_l^\dagger \mathrm{e}^{-a_i^\dagger \Omega_{ij} a_j}=a_l^\dagger(\mathrm{e}^{\boldsymbol{\Omega}})_{il}, \tag{1.136}$$

和

$$\mathrm{e}^{a_i^\dagger \Omega_{ij} a_j}\,|0\rangle=|0\rangle, \tag{1.137}$$

注意这里的 $|0\rangle$ 是 $n$ 模真空,则有

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{a_i^\dagger \Omega_{ij} a_j}&=\int\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}^2 z_i}{\pi}\right)\mathrm{e}^{a_i^\dagger \Omega_{ij} a_j}\,\mathrm{e}^{a_i^\dagger z_i-\frac{1}{2}z_i z_i^*}\,|0\rangle\langle Z|\\
&=\int\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}^2 z_i}{\pi}\right)\mathrm{e}^{a_i^\dagger \Omega_{ij} a_j}\,\mathrm{e}^{a_i^\dagger z_i-\frac{1}{2}z_i z_i^*}\,\mathrm{e}^{-\Omega_{ij}a_j}\,\mathrm{e}^{\Omega_{ij}a_j}\,|0\rangle\langle Z|\\
&\int\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}^2 z_i}{\pi}\right):\exp[a_i^\dagger(\mathrm{e}^{\boldsymbol{\Omega}})_{il}z_l-z_i z_i^*+a_i^\dagger z_i-a_i^\dagger a_i]:\\
&=:\exp[a_i^\dagger(\mathrm{e}^{\boldsymbol{\Omega}}-\boldsymbol{I})_{ij}a_j]:.
\end{aligned} \tag{1.138}$$

再考虑怎样将 $S\equiv\exp(a_i\sigma_{ij}a_j)\exp(a_i^\dagger\tau_{ij}\,a_j^\dagger)$ 化为正规乘积,式中 $\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}$ 都是 $n\times n$ 对称矩阵. 为此,利用 IWOP 技术以及在复 Hilbert 空间积分公式来解决此难题. 该积分公式为

$$\begin{aligned}
\Gamma&\equiv\int\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}^2 z_i}{\pi}\right)\exp\left[-\frac{1}{2}(z,z^*)\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}z\\ z^*\end{pmatrix}+(\mu,\nu^*)\begin{pmatrix}z\\ z^*\end{pmatrix}\right]\\
&=\left[\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\right]^{1/2}\exp\left[-\frac{1}{2}(\mu,\nu^*)\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\mu\\ \nu^*\end{pmatrix}\right],
\end{aligned} \tag{1.139}$$

式中:$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 都是 $n\times n$ 方阵,且 $\boldsymbol{B}=\widetilde{\boldsymbol{B}},\boldsymbol{C}=\widetilde{\boldsymbol{C}}$ 以及

$$(z,z^*)\equiv(z_1,z_2,\cdots,z_n,z_1^*,z_2^*,\cdots,z_n^*). \tag{1.140}$$

此积分的收敛条件可参见文献[30],这里不再赘述. 下文中我们假

定积分的收敛条件总是满足的. 式 (1.139) 也可等于

$$\Gamma=\left[\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\right]^{-1/2}\exp\left[-\frac{1}{2}(\mu,\nu^*)\begin{bmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\nu^*\\ \mu\end{pmatrix}\right] \quad (1.141)$$

式中已考虑

$$\begin{pmatrix}\nu^*\\ \mu\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{I} & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\mu\\ \nu^*\end{pmatrix},\quad \begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{I} & 0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{I} & 0\end{bmatrix}. \quad (1.142)$$

于是,用式(1.141) 及 IWOP 技术能将 $S$ 变为正规乘积形式,

$$\begin{aligned}S&=\int\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}^2 z_i}{\pi}\right)\exp(a_i\sigma_{ij}a_j)\ |Z\rangle\langle Z|\ \exp(a_i^\dagger\tau_{ij}\ a_j^\dagger)\\ &=\int\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}^2 z_i}{\pi}\right):\exp[-z_i^* z_i+a_i^\dagger z_i+a_i z_i^*+\\ &\quad z_i\sigma_{ij}z_j+z_i^*\tau_{ij}z_j^*-a_i^\dagger a_i]:\\ &=\int\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}^2 z_i}{\pi}\right):\exp\left[-\frac{1}{2}(z\,z^*)\begin{bmatrix}-2\boldsymbol{\sigma} & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{I} & -2\boldsymbol{\tau}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}z\\ z^*\end{pmatrix}+\right.\\ &\quad\left.(a^\dagger a)\begin{pmatrix}z\\ z^*\end{pmatrix}-a_i^\dagger a_i\right]:\\ &=\left[\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & -2\boldsymbol{\tau}\\ -2\boldsymbol{\sigma} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\right]^{-1/2}\\ &\quad:\exp\left[-\frac{1}{2}(a^\dagger,a)\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & -2\boldsymbol{\tau}\\ -2\boldsymbol{\sigma} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a\\ a^\dagger\end{pmatrix}-a_i^\dagger a_i\right]:\end{aligned} \quad (1.143)$$

式中:$(a^\dagger,a)\equiv(a_1^\dagger,a_2^\dagger,\cdots,a_n^\dagger,a_1,a_2,\cdots,a_n)$. 再根据矩阵分块的方法来计算逆矩阵和矩阵的行列式

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C})^{-1} & \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{D})^{-1}\\ \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A})^{-1} & (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\end{bmatrix}, \quad (1.144)$$

$$\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}=\det\boldsymbol{A}\det(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}), \quad (1.145)$$

假设这里所有矩阵是非奇异的,能够导出

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & -2\boldsymbol{\tau}\\ -2\boldsymbol{\sigma} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{I}-4\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\sigma})^{-1} & -2\boldsymbol{\tau}(4\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{I})^{-1}\\ -2\boldsymbol{\sigma}(4\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{I})^{-1} & (\boldsymbol{I}-4\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\sigma})^{-1}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\boldsymbol{I}-4\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\sigma})^{-1} & (\boldsymbol{I}-4\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\sigma})^{-1}2\boldsymbol{\tau} \\ (\boldsymbol{I}-4\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\sigma})^{-1}2\boldsymbol{\sigma} & (\boldsymbol{I}-4\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\sigma})^{-1} \end{bmatrix}, \tag{1.146}$$

基于此式,式(1.143)进一步化为

$$S = [\det(\boldsymbol{I}-4\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\sigma})]^{-1/2} \exp\{a_i^\dagger[(\boldsymbol{I}-4\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\sigma})^{-1}\boldsymbol{\tau}]_{ij}\, a_j^\dagger\} \cdot$$
$$\colon \exp\{a_i^\dagger[(\boldsymbol{I}-4\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\sigma})^{-1}-\boldsymbol{I}]_{ij}a_j\}\colon \exp\{a_i[(\boldsymbol{I}-4\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\sigma})^{-1}\boldsymbol{\sigma}]_{ij}a_j\}. \tag{1.147}$$

此外,利用式(1.138),式(1.147)中的第二指数算符可改写为

$$\colon \exp\{a_i^\dagger[(\boldsymbol{I}-4\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\sigma})^{-1}-\boldsymbol{I}]_{ij}a_j\}\colon = \exp\{a_i^\dagger[(\boldsymbol{I}-4\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\sigma})^{-1}]_{ij}a_j\}. \tag{1.148}$$

显然,式(1.147)为式(1.133)的非平庸推广. 作为式(1.147)的例子,取

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & \rho \\ 0 & \rho & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \lambda' & 0 \\ \lambda' & 0 & \rho' \\ 0 & \rho' & 0 \end{bmatrix}, \tag{1.149}$$

很容易计算

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{I}-4\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\sigma})^{-1}\boldsymbol{\tau} &= \frac{\boldsymbol{\tau}}{1-\lambda\lambda'-\rho\rho'}, \\ (\boldsymbol{I}-4\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\sigma})^{-1}\boldsymbol{\sigma} &= \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1-\lambda\lambda'-\rho\rho'}, \end{aligned} \tag{1.150}$$

$$(\boldsymbol{I}-4\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\sigma})^{-1} = \frac{1}{1-\lambda\lambda'-\rho\rho'}\begin{bmatrix} 1-\rho\rho' & 0 & \lambda'\rho \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda\rho' & 0 & 1-\lambda\lambda' \end{bmatrix}.$$

根据式(1.147)直接得到

$$\exp(\lambda a_1 a_2 + \rho a_2 a_3)\exp(\lambda' a_1^\dagger a_2^\dagger + \rho' a_2^\dagger a_3^\dagger)$$
$$= \exp\left[(a_1, a_2, a_3)\boldsymbol{\sigma}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right]\exp\left[(a_1^\dagger, a_2^\dagger, a_3^\dagger)\boldsymbol{\tau}\begin{pmatrix} a_1^\dagger \\ a_2^\dagger \\ a_3^\dagger \end{pmatrix}\right]$$
$$= \frac{1}{1-\lambda\lambda'-\rho\rho'}\exp\left(\frac{\lambda' a_1^\dagger a_2^\dagger + \rho' a_2^\dagger a_3^\dagger}{1-\lambda\lambda'-\rho\rho'}\right) \cdot$$

$$
:\exp\left\{\frac{1}{1-\lambda\lambda'-\rho\rho'}[a_1^\dagger a_1\lambda\lambda' + a_2^\dagger a_2(\lambda\lambda'+\rho\rho') + \right.
$$

$$
\left. a_3^\dagger a_3\rho\rho' + \lambda'\rho\, a_1^\dagger a_3 + \rho'\lambda\, a_3^\dagger a_1]\right\}:\exp\left(\frac{\lambda a_1 a_2 + \rho a_2 a_3}{1-\lambda\lambda'-\rho\rho'}\right). \tag{1.151}
$$

再例如，将 $W \equiv \exp(Ka_1^2 + \delta a_1 a_2)\exp(K' a_1^{\dagger 2} + \delta' a_1^\dagger a_2^\dagger)$ 展开为正规乘积形式，在这种情况下，取

$$
\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} K & \delta/2 \\ \delta/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} K' & \delta'/2 \\ \delta'/2 & 0 \end{bmatrix}, \tag{1.152}
$$

可计算出

$$
(\boldsymbol{I} - 4\boldsymbol{\tau\sigma})^{-1}\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} K & \delta(1-\delta\delta')/2 \\ \delta(1-\delta\delta')/2 & K'\delta^2 \end{pmatrix} Y^{-1},
$$

$$
(\boldsymbol{I} - 4\boldsymbol{\tau\sigma})^{-1}\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} K' & \delta'(1-\delta\delta')/2 \\ \delta'((1-\delta\delta')/2 & K\delta'^2 \end{pmatrix} Y^{-1},
$$

$$
Y = (1-\delta\delta')^2 - 4KK', \tag{1.153}
$$

因此，

$$
W = Y^{-1/2}\exp\{Y^{-1}[K' a_1^{\dagger 2} + \delta'^2 K a_2^{\dagger 2} + \delta'(1-\delta\delta')\, a_1^\dagger a_2^\dagger]\}\cdot
$$

$$
:\exp\left[Y^{-1}(a_1^\dagger, a_2^\dagger)\begin{pmatrix} 1-\delta\delta' & 2K'\delta \\ 2K\delta' & 1-4KK'-\delta\delta' \end{pmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} - \right.
$$

$$
\left. a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2 \right]:\exp\{Y^{-1}[Ka_1^2 + \delta^2 K' a_2^2 + \delta(1-\delta\delta')a_1 a_2]\}. \tag{1.154}
$$

当取 $\delta = \delta' = 0$ 时，上式就变为

$$
W|_{\delta=\delta'=0} = \frac{1}{\sqrt{1-4KK'}}\exp\left(\frac{K' a_1^{\dagger 2}}{1-4KK'}\right)\cdot
$$

$$
:\exp\left[\left(\frac{1}{1-4KK'} - 1\right)a_1^\dagger a_1\right]:\exp\left(\frac{Ka_1^2}{1-4KK'}\right), \tag{1.155}
$$

结果与式(1.83) 的完全一样.

另外，根据式(1.151) 的正规乘积展开式也能直接计算出一

些态矢量的归一化系数. 例如

$$|\lambda,\rho\rangle = c_1\exp(\lambda a_1^\dagger a_2^\dagger + \rho a_2^\dagger a_3^\dagger)\,|000\rangle, \quad |\lambda|^2 + |\rho|^2 < 1, \tag{1.156}$$

式中: $c_1$ 就是待求归一化系数. 利用式(1.151)与正规乘积的性质, 立刻得到

$$\begin{aligned}1 &= \langle\lambda,\rho|\lambda,\rho\rangle \\ &= |c_1|^2\langle 000|\exp(\lambda^* a_1a_2 + \rho^* a_2a_3)\exp(\lambda a_1^\dagger a_2^\dagger + \rho a_2^\dagger a_3^\dagger)\,|000\rangle \\ &= \frac{|c_1|^2}{1-|\lambda|^2-|\rho|^2},\end{aligned} \tag{1.157}$$

故 $|c_1| = (1-|\lambda|^2-|\rho|^2)^{1/2}$. 当 $\rho = 0, \lambda = \tanh r$ 时, $c_1 = \operatorname{sech} r$, 于是式(1.156)变为我们熟知的双模压缩真空态. 另举一例:

$$\begin{aligned}|\psi\rangle &= c_2\exp[\gamma(a_1^{\dagger 2} + a_2^{\dagger 2} + a_3^{\dagger 2} - a_1^\dagger a_2^\dagger - a_2^\dagger a_3^\dagger - a_1^\dagger a_3^\dagger)]\,|000\rangle \\ &= c_2\exp\left[(a_1^\dagger, a_2^\dagger, a_3^\dagger)\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}a_1^\dagger \\ a_2^\dagger \\ a_3^\dagger\end{pmatrix}\right]|000\rangle,\end{aligned} \tag{1.158}$$

式中: $c_2$ 是待求的归一化系数, $\gamma$ 为实参数,

$$\boldsymbol{M} = \gamma\begin{bmatrix}1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1\end{bmatrix}, \tag{1.159}$$

利用式(1.151)直接得到

$$\begin{aligned}1 &= \langle\psi|\psi\rangle \\ &= |c_2|^2[\det(\boldsymbol{I} - 4\omega^2)]^{-1/2} = |c_2|^2/(1-9\gamma^2),\end{aligned} \tag{1.160}$$

所以归一化系数为 $|c_2| = (1-9\gamma^2)^{1/2}$. 可以看出, 若没有式(1.151)的结果求出归一化系数 $|c_2|$ 是很困难的.

最后, 分别利用坐标表象与动量表象的完备性以及 IWOP 技术导出 $\exp(\hat{X}_l\Lambda_{lm}\hat{X}_m)$ 与 $\exp(\hat{P}_l\Omega_{lm}\hat{P}_m)$ 的正规乘积形式, 这里 $\boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{\Omega}$ 都是 $n\times n$ 对称矩阵. 首先利用双模坐标表象完备性求出 $e^{\lambda\hat{X}_1\hat{X}_2}$ 的正规乘积形式, 即

$$
\begin{aligned}
e^{\lambda\hat{X}_1\hat{X}_2} &= \int dx_1 dx_2 e^{\lambda x_1 x_2} \, |x_1, x_2\rangle\langle x_1, x_2| \\
&= \int \frac{dx_1 dx_2}{\pi} : \exp\left[-x_1^2 - x_2^2 + \sqrt{2}x_1\left(a_1^\dagger + a_1 + \frac{\lambda x_2}{\sqrt{2}}\right) + \right. \\
&\quad \left. \sqrt{2}x_2(a_2^\dagger + a_2) - \frac{1}{2}(a_2^\dagger + a_2)^2 - \frac{1}{2}(a_1^\dagger + a_1)^2\right] : \\
&= \frac{2}{\sqrt{4-\lambda^2}}\exp\left[\frac{\lambda^2(a_2^{\dagger 2} + a_1^{\dagger 2})}{2(4-\lambda^2)}\right] : \exp\left[\frac{2\lambda(a_2^\dagger + a_2)(a_1^\dagger + a_1)}{4-\lambda^2} + \right. \\
&\quad \left. \frac{\lambda^2(a_2^\dagger a_2 + a_1^\dagger a_1)}{4-\lambda^2}\right] : \exp\left[\frac{\lambda^2(a_2^2 + a_1^2)}{2(4-\lambda^2)}\right]. \qquad (1.161)
\end{aligned}
$$

类似地，利用动量表象完备性求出 $e^{\lambda\hat{P}_1\hat{P}_2}$ 的正规乘积形式

$$
\begin{aligned}
e^{\lambda\hat{P}_1\hat{P}_2} &= \int dp_1 dp_2 e^{\lambda p_1 p_2} \, |p_1, p_2\rangle\langle p_1, p_2| \\
&= \frac{2}{\sqrt{4-\lambda^2}}\exp\left[\frac{-\lambda^2(a_2^{\dagger 2} + a_1^{\dagger 2})}{2(4-\lambda^2)}\right] : \exp\left[\frac{\lambda^2(a_2^\dagger a_2 + a_1^\dagger a_1)}{4-\lambda^2} - \right. \\
&\quad \left. \frac{2\lambda(a_2^\dagger + a_2)(a_1^\dagger + a_1)}{4-\lambda^2}\right] : \exp\left[\frac{-\lambda^2(a_2^2 + a_1^2)}{2(4-\lambda^2)}\right]. \qquad (1.162)
\end{aligned}
$$

对于多模坐标与动量的完备性可表示为

$$
\begin{aligned}
&\int d\vec{x} \, |\vec{x}\rangle\langle\vec{x}| = 1, \quad d^n\vec{x} \equiv dx_1 dx_2 \cdots dx_n, \\
&|\vec{x}\rangle \equiv |x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle, \quad \hat{X}_l \, |x_l\rangle = x_l \, |x_l\rangle \qquad (1.163) \\
&\int d\vec{p} \, |\vec{p}\rangle\langle\vec{p}| = 1, \quad d^n\vec{p} \equiv dp_1 dp_2 \cdots dp_n, \\
&|\vec{p}\rangle \equiv |p_1, p_2, \cdots, p_n\rangle, \quad \hat{P}_l \, |p_l\rangle = p_l \, |p_l\rangle \qquad (1.164)
\end{aligned}
$$

有

$$
\begin{aligned}
\exp(\hat{X}_l\Lambda_{lm}\hat{X}_m) &= \int d^n\vec{x} e^{\hat{X}_l\Lambda_{lm}\hat{X}_m} \, |\vec{x}\rangle\langle\vec{x}| \\
&= \int d^n\vec{x}\pi^{-n/2} : \exp[-x_l x_l + \sqrt{2}x_l(a_l^\dagger + a_l) + \\
&\quad x_l\Lambda_{lm}x_m - \hat{X}_l\hat{X}_l]
\end{aligned}
$$

$$= \int d^n \vec{x} \pi^{-n/2} : \exp[- x_l (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Lambda})_{lm} x_m +$$
$$2 x_l \hat{X}_l - \hat{X}_l \hat{X}_l] :$$
$$= [\det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Lambda})]^{-1/2} \cdot$$
$$: \exp[- \hat{X}_l (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Lambda})^{-1}_{lm} \hat{X}_m - \hat{X}_l \hat{X}_l] :, \tag{1.165}$$

和

$$\exp(\hat{P}_l \Omega_{lm} \hat{P}_m) = \int d^n \vec{p} e^{\hat{P}_l \Omega_{lm} \hat{P}_m} |\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|$$
$$= \int d^n \vec{p} \pi^{-n/2} : \exp[-p_l (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Omega})_{lm} p_m + 2 p_l \hat{P}_l - \hat{P}_l \hat{P}_l] :$$
$$= [\det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Omega})]^{-1/2} \cdot$$
$$: \exp[- \hat{P}_l (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Omega})^{-1}_{lm} \hat{P}_m - \hat{P}_l \hat{P}_l] :. \tag{1.166}$$

这里已要求 $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Lambda}$ 与 $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Omega}$ 都必须是正定的，并已用了下面的积分公式

$$\int d^n \vec{x} \exp[- x_l N_{lm} x_m + V_l x_l]$$
$$= \pi^{n/2} (\det \boldsymbol{N})^{-1/2} \exp\left[\frac{1}{4} V_l N^{-1}_{lm} V_m\right], \quad \boldsymbol{N} = \widetilde{\boldsymbol{N}}, \tag{1.167}$$

式中：$\boldsymbol{N}$ 是一个正定的 $n \times n$ 矩阵.

## 1.7 反正规乘积算符内的积分技术

算符的反正规排列在量子统计力学的密度算符理论及量子光学中相当有用. 一个密度算符 $\rho$ 在相干态 $|z\rangle$ 中的 $c$ 数展开称为 Glauber-Sudarshan $P$ 表示[21]

$$\rho = \int \frac{d^2 z}{\pi} P(z) |z\rangle\langle z|, \tag{1.168}$$

一旦知道 $\rho$ 的反正规排列就相当于知道了其 $P$ 表示. 下面，求 $\rho$ 的反正规乘积展开. 为此，引入反正规乘积（记为 $\vdots\ \vdots$）的若干性质（注

意到反正规乘积的定义就是将所有的产生算符$a^\dagger$都移到所有湮灭算符 $a$ 的右边，它与正规乘积的定义如同左右手那样是地位等价的，因此在⋮ ⋮内部玻色算符的性质与在 ∶ ∶ 内相似)，即[31-33]：

(1) 在反正规乘积内部玻色算符可以对易.

(2) $c$ 数可以自由出入反正规乘积记号⋮ ⋮.

(3) 可对反正规乘积⋮ ⋮内的 $c$ 数进行积分或微分运算，前者要求积分收敛.

(4) 反正规乘积⋮ ⋮内的反正规乘积记号⋮ ⋮可以取消.

(5) 反正规乘积⋮$W$⋮与反正规乘积⋮$V$⋮之和为⋮$W+V$⋮.

(6) 真空投影算符 $|0\rangle\langle 0|$ 的反正规乘积形式是

$$|0\rangle\langle 0| = \pi\delta(a)\delta(a^\dagger) = \int \frac{d^2\xi}{\pi} e^{i\xi a} e^{i\xi^* a^\dagger}. \tag{1.169}$$

事实上，用正规乘积内的积分技术，有

$$\begin{aligned}
\pi\delta(z-a)\delta(z^*-a^\dagger) &= \int \frac{d^2\xi}{\pi} e^{-i\xi(z-a)} e^{-i\xi^*(z^*-a^\dagger)} \\
&= \int \frac{d^2\xi}{\pi} :e^{-|\xi|^2 - i\xi(z-a) - i\xi^*(z^*-a^\dagger)}: \\
&= :e^{-(z^*-a^\dagger)(z-a)}: \\
&= |z\rangle\langle z|,
\end{aligned} \tag{1.170}$$

当取 $z=0$ 时，上式就是式(1.169).

Mehta 曾给出的一个由 $\rho$ 求 $P(z)$ 的式子[34]：

$$P(z) = e^{|z|^2} \int \frac{d^2\beta}{\pi} \langle -\beta|\, \rho\, |\beta\rangle \exp(|\beta|^2 + \beta^* z - \beta z^*), \tag{1.171}$$

其中：$|\beta\rangle$ 是相干态，注意这里 $\beta^* z - \beta z^*$ 是个纯虚数，故此式可视为傅里叶变换. 考虑式(1.171) 与式(1.170)，可以把式(1.168) 改写为

$$\begin{aligned}
\rho &= \int \frac{d^2 z}{\pi} P(z)\ |z\rangle\langle z| \\
&= \int \frac{d^2\beta}{\pi} \langle -\beta|\, \rho\, |\beta\rangle e^{|\beta|^2} \int \frac{d^2 z}{\pi} e^{|z|^2 + \beta^* z - \beta z^*} \vdots \int \frac{d^2\xi}{\pi} e^{-i\xi(z-a)} e^{-i\xi^*(z^*-a^\dagger)} \vdots
\end{aligned}$$

$$= \int \frac{d^2\beta}{\pi}\langle -\beta|\,\rho\,|\beta\rangle e^{|\beta|^2} \vdots \int \frac{d^2\xi}{\pi} e^{ia\xi + i\xi^* a^\dagger}$$

$$\int \frac{d^2 z}{\pi}\cdot \exp[-|z|^2 + (\beta^* - i\xi + a^\dagger)z + (a - i\xi^* - \beta)z^*] \vdots,$$

$$(1.172)$$

然后用反正规乘积内的积分技术对上式中的 $d^2 z$ 与 $d^2\xi$ 积分，并利用积分公式(1.134)，得到

$$\rho = \int \frac{d^2\beta}{\pi} \vdots \langle -\beta|\,\rho\,|\beta\rangle \exp(|\beta|^2 + \beta^* a - \beta a^\dagger + a^\dagger a) \vdots, \tag{1.173}$$

这就是范洪义首先得到的密度算符 $\rho$ 的反正规乘积展开式. 它告诉我们，一旦 $\rho$ 的相干态矩阵元 $\langle -\beta|\,\rho\,|\beta\rangle$ 已知，就可在 $\vdots\ \vdots$ 内积分直接给出 $\rho$ 的反正规乘积形式. 特别地，当 $\rho = 1$ 时，有

$$1 = \int \frac{d^2\beta}{\pi} \vdots \exp(|\beta|^2 + \beta^* a - \beta a^\dagger + a^\dagger a) \vdots. \tag{1.174}$$

根据前面的式(1.14)，可以知道

$$\langle -\beta|\, e^{\lambda a^\dagger a}\, |\beta\rangle = \exp[-(1 + e^\lambda)\,|\beta|^2], \tag{1.175}$$

代入式(1.173)，得到 $e^{\lambda a^\dagger a}$ 的反正规乘积展开形式

$$e^{\lambda a^\dagger a} = \int \frac{d^2\beta}{\pi} \vdots \exp(-e^\lambda\,|\beta|^2 + \beta^* a - \beta a^\dagger + a^\dagger a) \vdots$$

$$= e^{-\lambda} \vdots \exp[(1 - e^{-\lambda}) a^\dagger a] \vdots. \tag{1.176}$$

再例如

$$e^{\lambda a^{\dagger 2}} e^{\sigma a^2} = \int \frac{d^2\beta}{\pi} \vdots \exp(|\beta|^2 + \beta^2 a - \beta a^\dagger + \sigma\beta^2 + \lambda\beta^{*2} + a^\dagger a) \vdots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - 4\sigma\lambda}} \vdots \exp\left[\frac{\sigma a^2 + \lambda a^{\dagger 2}}{1 - 4\sigma\lambda} + \left(1 - \frac{1}{1 - 4\sigma\lambda}\right) a^\dagger a\right] \vdots,$$

$$(1.177)$$

进一步用式(1.176) 可将式(1.177) 写为

$$e^{\lambda a^{\dagger 2}} e^{\sigma a^2} = \sqrt{1 - 4\sigma\lambda}\, \exp\left(\frac{\sigma a^2}{1 - 4\sigma\lambda}\right) \exp[a^\dagger a \ln(1 - 4\sigma\lambda)]\cdot$$

$$\exp\left(\frac{\lambda a^{\dagger 2}}{1-4\sigma\lambda}\right). \tag{1.178}$$

最后，考虑多模情况，如何将 $G \equiv \exp(a_i^\dagger \tau_{ij} a_j^\dagger)\exp(a_i\sigma_{ij}a_j)$ 表示成反正规乘积形式(式中 $\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}$ 都是 $n\times n$ 对称矩阵). 很显然有

$$\begin{aligned}&\langle -\beta_1, -\beta_2, \cdots, -\beta_n \mid G \mid \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\rangle \\ &= \exp(-2\mid\beta_i\mid^2 + \beta_i^* \tau_{ij}\beta_j^* + \beta_i\sigma_{ij}\beta_j),\end{aligned} \tag{1.179}$$

再根据式(1.139) 与式(1.173)，有

$$\begin{aligned}G &= \int\prod_{i=1}^n\left(\frac{\mathrm{d}^2\beta_i}{\pi}\right) \vdots \exp[-\mid\beta_i\mid^2 + \beta_i^* a_i - a_i^\dagger\beta_i + \\ &\quad \beta_i^*\tau_{ij}\beta_j^* + \beta_i\sigma_{ij}\beta_j + a_i^\dagger a_i] \vdots \\ &= \int\prod_{i=1}^n\left(\frac{\mathrm{d}^2\beta_i}{\pi}\right) \vdots \exp\left[-\frac{1}{2}(\beta,\beta^*)\begin{pmatrix}-2\boldsymbol{\sigma} & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{I} & -2\boldsymbol{\tau}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta\\ \beta^*\end{pmatrix} + \right. \\ &\quad \left.(-a^\dagger, a)\begin{pmatrix}\beta\\ \beta^*\end{pmatrix} + a_i^\dagger a_i\right] \vdots \\ &= \left[\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & -2\boldsymbol{\tau}\\ -2\boldsymbol{\sigma} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\right]^{-1/2} \vdots \exp\left[-\frac{1}{2}(-a^\dagger, a)\cdot\right. \\ &\quad \left.\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & -2\boldsymbol{\tau}\\ -2\boldsymbol{\sigma} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ -a^\dagger\end{pmatrix} + a_i^\dagger a_i\right] \vdots \\ &= [\det(\boldsymbol{I} - 4\boldsymbol{\sigma\tau})]^{-1/2}\exp\{a_i[(\boldsymbol{I}-4\boldsymbol{\tau\sigma})^{-1}\boldsymbol{\sigma}]_{ij}a_j\}\cdot \\ &\quad \vdots \exp\{-a_i^\dagger(\boldsymbol{I}-4\boldsymbol{\tau\sigma})_{ij}^{-1}a_j + a_i^\dagger a_i\} \vdots \cdot \\ &\quad \exp\{a_i^\dagger[(\boldsymbol{I}-4\boldsymbol{\tau\sigma})^{-1}\boldsymbol{\tau}]_{ij}a_j^\dagger\},\end{aligned} \tag{1.180}$$

式中：$(\beta,\beta^*)\equiv(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,\beta_1^*,\beta_2^*,\cdots,\beta_n^*)$，$(-a^\dagger,a)\equiv(-a_1^\dagger, -a_2^\dagger,\cdots,-a_n^\dagger,a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

金代文学家元好问在谈到诗歌创造时写道："眼处心生句自神，暗中摸索总非真. 画图临出秦川景，亲到长安有几人?"可以作为我们研究理论物理的借鉴，研究理论物理光有概念是不够的，需要亲自做数学推导，尤其是独创更需有自身计算的体验，要"亲到长安"，否则就会弃其本而逐其末，有流于主观臆造的危险. 只有经历了数学推导(咀嚼了真味)才会对物理概念与原理有真实感受，

"学诗谩有惊人句",而进入到一种境界. 只有对 Dirac 符号做过积分,我们才能真正理解它. 人之无基本功者,在理论物理界谓之无格,无格则无术,所谓寡学之辈,则多性狂,这就是为什么有的人无真本领,却还夸夸其谈. 因此,扩展研究生的数学能力与视野,强化他们的基本功,鼓励他们发明新的数学物理方法,不但能使他们避免犯基本性的错误,也是让他们一步一个脚印地面对生活与工作,体会做真才实学之难,鄙视科技造假之丑,在科研中不求侥幸,做一个老实人. 清代桐城派代表人物刘大魁在"论文偶记"中写道:"凡文,笔老则简,意真则简,辞切则简,理当则简,味淡则简,气蕴则简,品贵则简,神远而含藏不尽则简. 故简为文章尽境."能传世的理论物理工作,如 Dirac 符号法及 IWOP 技术就是意真辞切的,神远而含藏不尽的. 本章最后总结一下对 Dirac 符号积分的成功所带来的优点:

(1) 给出了经典变换到量子幺正变换算符的捷径,可以发现很多新的幺正算符,为量子调控提供新思路.

(2) 在不能用群论的地方发挥作用.

(3) 从纯数学的观点看,是牛顿-莱布尼兹积分的一个新发展方向,可以简捷地导出很多新积分公式与新算符恒等式.

(4) 用不同的算符编序方案,对同一个积分的结果表现形式不同,适用于计算不同的物理量.

(5) 可以找到很多新的有用量子力学表象,有利于求解很多动力学方程,尤其是建立连续变量的纠缠态表象可以阐述很多与量子纠缠相关的物理问题.

(6) 可以发现很多新的有望可物理制备的有特殊物性的量子态.

(7) 揭示量子力学理论深层次美感,它是天籁之美.

(8) 降低人们对量子力学数学物理的神秘感和过度的抽象感.

(9) 有效地促进了量子光学理论、以及经典光学与量子光学

的相互渗透.

(10) 丰富和发展了量子相空间理论与量子 Tomography 论.

IWOP 技术的发明使作者偶而也会玩味狄拉克的另一段话："……一旦有了发现,它往往显得那么明显,以致于人们奇怪为什么从前会没有人想到它."

# 第2章 Weyl编序算符内积分技术发展Dirac符号法

狄拉克曾对某记者表示，Weyl的天分高到他也不能理解.本章用IWOP技术分析与发展量子力学的Weyl对应.

## 2.1 用IWOP技术导出Wigner算符的坐标表象表示

在量子力学中，由于Heisenberg不确定原理的存在，不可能同时确定粒子的坐标$x$和动量$p$，因而在$x-p$相空间中难以定义一个可以解释为几率密度的分布函数.然而，Wigner首先引入了一个函数，其形式类似于经典的准几率密度，称为Wigner函数[36~38].

对于任一态$|\psi\rangle$，定义其Wigner函数为$\langle\psi|\Delta(x,p)|\psi\rangle$，用式(1.21)，式(1.22)，式(1.24)以及式(1.29)有

$$\int \mathrm{d}p\langle\psi|\ \Delta(x,p)\ |\psi\rangle=|\psi(x)|^2 \tag{2.1}$$

和

$$\int \mathrm{d}x\langle\psi|\ \Delta(x,p)\ |\psi\rangle=|\ \psi(p)\ |^2. \tag{2.2}$$

这就是Wigner最初的思想[35]：即在$x-p$相空间中建立一个函数$W(x,p)$，它的边缘分布分别为在坐标空间和动量空间找到粒子的几率，因此我们可以断定$\Delta(x,p)$就是Wigner算符.

由IWOP技术，可以将式(1.20)的Wigner算符改写为

$$\Delta(x,p)=\frac{1}{\pi}:\mathrm{e}^{-(x-\hat{X})^2-(p-\hat{P})^2}:$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{4\pi^2} : \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-\hat{X})u-\mathrm{i}(p-\hat{P})v-\frac{1}{4}(u^2+v^2)} :, \tag{2.3}$$

再利用$[\hat{X},\hat{P}]=\mathrm{i}$,($\hbar=1$) 以及 Baker-Hausdorff 公式

$$\mathrm{e}^{\hat{A}}\mathrm{e}^{\hat{B}} = \mathrm{e}^{\hat{A}+\hat{B}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}, \quad [\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] = [\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]] = 0, \tag{2.4}$$

得

$$\Delta(x,p) = \int \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{4\pi^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-\hat{X})u-\mathrm{i}(p-\hat{P})v}$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{4\pi^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}pv}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{P}(v/2)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-\hat{X})u}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{P}(v/2)}. \tag{2.5}$$

进一步,用 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{P}(v/2)}\,|x\rangle = |x+v/2\rangle$ 和$\int \frac{\mathrm{d}u}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-\hat{X})u} = \delta(x-\hat{X}) = |x\rangle\langle x|$,上式就变为

$$\Delta(x,p) = \int \frac{\mathrm{d}v}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}pv}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{P}(v/2)}\,|x\rangle\langle x|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{P}(v/2)}$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}v}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}pv}\left|x+\frac{v}{2}\right\rangle\left\langle x-\frac{v}{2}\right|, \tag{2.6}$$

这就是 Wigner 算符的坐标表象形式[37,39,40]. 由此导出

$$\mathrm{tr}\,[\Delta(x',p')\Delta(x,p)]$$
$$= \int \mathrm{d}x''\int \frac{\mathrm{d}v'}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'v'}\langle x''\left|x'+\frac{v'}{2}\right\rangle\left\langle x'-\frac{v'}{2}\right| \cdot$$
$$\int \frac{\mathrm{d}v}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}pv}\left|x+\frac{v}{2}\right\rangle\left\langle x-\frac{v}{2}\right|x''\rangle$$
$$= \int \mathrm{d}x''\int \frac{\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v'}{4\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}pv+\mathrm{i}p'v'}\delta\left(x''-x'-\frac{v'}{2}\right)\delta\left(x'-x-\frac{v+v'}{2}\right)\cdot$$
$$\delta\left(x-\frac{v}{2}-x''\right)$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v'}{4\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}pv+\mathrm{i}p'v'}\delta\left(x'-x-\frac{v'+v}{2}\right)\delta\left(x-x'-\frac{v+v'}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\delta(x-x')\delta(p-p'), \tag{2.7}$$

并从任意算符的展开式(1.16)可见

$$2\pi \mathrm{tr}[H(\hat{X},\hat{P})\Delta(x,p)] = 2\pi \mathrm{tr}\left[\int \mathrm{d}p'\mathrm{d}x' h(x',p')\Delta(x',p')\Delta(x,p)\right]$$
$$= h(x,p) \tag{2.8}$$

它表明如何由 $H(\hat{X},\hat{P})$ 求出 $h(x,p)$. 利用式(2.6)，上式也可写为

$$h(x,p) = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}pv}\left\langle x-\frac{v}{2}\right| H(\hat{X},\hat{P}) \left| x+\frac{v}{2}\right\rangle \mathrm{d}v, \tag{2.9}$$

经典函数 $h(x,p)$ 称为算符 $H(\hat{X},\hat{P})$ 的 Wigner 变换[41].

根据式(2.6)的结果，Weyl 对应式(2.9)的逆变换为

$$\left\langle x-\frac{v}{2}\right| H(\hat{X},\hat{P}) \left| x+\frac{v}{2}\right\rangle = \int \frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pv}h(x,p), \tag{2.10}$$

或

$$\langle x|\ H(\hat{X},\hat{P})\ |x'\rangle = \int \frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x-x')}h\left(\frac{x+x'}{2},p\right). \tag{2.11}$$

利用坐标表象的完备性，对式(2.11)左乘$\int \mathrm{d}x\ |x\rangle$，右乘$\int \mathrm{d}x'\langle x'|$，又可恢复 Weyl 对应式

$$H(\hat{X},\hat{P}) = \int \mathrm{d}x'\mathrm{d}x\ |x\rangle\langle x'| \int \frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x-x')}h\left(\frac{x+x'}{2},p\right)$$
$$= \int \mathrm{d}p\mathrm{d}x h(x,p)\int \frac{\mathrm{d}v}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}pv}\left| x+\frac{v}{2}\right\rangle\left\langle x-\frac{v}{2}\right|$$
$$= \int \mathrm{d}p\mathrm{d}x h(x,p)\Delta(x,p). \tag{2.12}$$

## 2.2 Wigner 算符的 Weyl 编序形式

在量子力学中由于坐标算符 $\hat{X}$ 与动量算符 $\hat{P}$ 不对易，故而经典函数 $h(x,p)$ 过渡到量子力学所对应的算符 $H(\hat{X},\hat{P})$ 不是唯一

的，1932 年，Weyl 给出了一种现在称之为 Weyl 对应的编序方案[42]：

$$x^m p^n \to \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \hat{X}^{m-l}\hat{P}^n\hat{X}^l, \qquad (2.13)$$

实际上它是 Weyl 对应的结果，这一点可以利用式(2.8) 和(2.6) 求出 $\left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \hat{X}^{m-l}\hat{P}^n\hat{X}^l$ 的经典 Weyl 对应来看出，即

$$\begin{aligned}
&2\pi\mathrm{tr}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \hat{X}^{m-l}\hat{P}^n\hat{X}^l \Delta(x,p)\right] \\
&= \int \mathrm{d}u \mathrm{e}^{\mathrm{i}pu} \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \left(x-\frac{u}{2}\right)^{m-l} \left(x+\frac{u}{2}\right)^l \cdot \\
&\quad \left\langle x-\frac{u}{2}\right| \hat{P}^n \left| x+\frac{u}{2}\right\rangle \\
&= x^m \int \mathrm{d}u \mathrm{e}^{\mathrm{i}pu} \left\langle x-\frac{u}{2}\right| \hat{P}^n \left| x+\frac{u}{2}\right\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi} x^m \int \mathrm{d}u \mathrm{e}^{\mathrm{i}pu} \int \mathrm{d}p' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'u} p'^n \\
&= x^m \int \mathrm{d}p' \delta(p-p') p'^n \\
&= x^m p^n. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

引入记号$\vdots\ \vdots$来表示 Weyl 编序[12,43]，式(2.13) 的右边就是 Weyl 编序好了的，可写成

$$\left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \hat{X}^{m-l}\hat{P}^n\hat{X}^l = \vdots \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \hat{X}^{m-l}\hat{P}^n\hat{X}^l \vdots, \qquad (2.15)$$

值得注意的是在$\vdots\ \vdots$内部 $\hat{X}$ 与 $\hat{P}$ 是对易的. 这就像玻色算符在正规乘积 $::$ 内是对易的一样，$:aa^\dagger:=:a^\dagger a:=a^\dagger a$. 这样就有

$$\vdots \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \hat{X}^{m-l}\hat{P}^n\hat{X}^l \vdots = \vdots \hat{X}^m\hat{P}^n \vdots. \qquad (2.16)$$

由式(2.15)与式(2.16)可见,要将$\vdots\hat{X}^m\hat{P}^n\vdots$外面四点去掉,则必须先将其写成 Weyl 编序形式.

于是,利用式(2.16),就可将式(2.14)简化为

$$2\pi\mathrm{tr}[\vdots\hat{X}^m\hat{P}^n\vdots\Delta(p,x)]=x^m p^n, \tag{2.17}$$

并根据式(2.12),有

$$\vdots\hat{X}^m\hat{P}^n\vdots=\int\mathrm{d}p\mathrm{d}x\Delta(x,p)x^m p^n, \tag{2.18}$$

从而可以看出 Wigner 算符的 Weyl 编序形式

$$\Delta(x,p)=\vdots\delta(x-\hat{X})\delta(p-\hat{P})\vdots, \tag{2.19}$$

这是一个很容易记住的公式,即 Wigner 算符的 Weyl 编序形式是 δ 函数,因为它简洁,故很有用,文献中也称为 Wigner 算符的范氏形式[44]. 根据式(2.19),它对于 $x$ 和 $p$ 的边缘积分又表示为

$$\int\mathrm{d}x\Delta(x,p)=\int\mathrm{d}x\vdots\delta(x-\hat{X})\delta(p-\hat{P})\vdots=\vdots\delta(p-\hat{P})\vdots \tag{2.20}$$

和

$$\int\mathrm{d}p\Delta(x,p)=\int\mathrm{d}p\vdots\delta(x-\hat{X})\delta(p-\hat{P})\vdots=\vdots\delta(x-\hat{X})\vdots. \tag{2.21}$$

再联合式(1.24)与式(1.29),有

$$|p\rangle\langle p|=\frac{1}{\sqrt{\pi}}:\mathrm{e}^{-(x-\hat{P})^2}:=\vdots\delta(p-\hat{P})\vdots, \tag{2.22}$$

和

$$|x\rangle\langle x|=\frac{1}{\sqrt{\pi}}:\mathrm{e}^{-(x-\hat{X})^2}:=\vdots\delta(x-\hat{X})\vdots. \tag{2.23}$$

同样的,根据式(2.8)与式(2.6),也可以求出算符 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}u\hat{P}+\mathrm{i}v\hat{X}}$ 的经典 Weyl 对应

$$2\pi\mathrm{tr}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}u\hat{P}+\mathrm{i}v\hat{X}}\Delta(x,p)]=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}uv}{2}}\int\mathrm{d}u'\mathrm{e}^{\mathrm{i}pu'}\left\langle x-\frac{u'}{2}\right|\mathrm{e}^{\mathrm{i}u\hat{P}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}v\hat{X}}\left|x+\frac{u'}{2}\right\rangle$$

$$= e^{-\frac{iuv}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} \int \frac{du'}{2\pi} e^{ipu'} e^{iv\left(x+\frac{u'}{2}\right)} \int dp' e^{-ip'u'} p'^n$$

$$= e^{ivx} e^{-\frac{iuv}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} \int dp' p'^n \delta\left(p - p' + \frac{v}{2}\right)$$

$$= e^{ivx+ipu}. \tag{2.24}$$

因而,有

$$\int dp dx e^{ivq+ipu} \Delta(x,p) = e^{iu\hat{P}+iv\hat{X}}. \tag{2.25}$$

另一方面,由式(2.19),得

$$\int dp dx e^{ivx+ipu} \Delta(x,p) = \int dp dx e^{ivx+ipu} \vdots\, \delta(x-\hat{X})\delta(p-\hat{P})\, \vdots$$

$$= \vdots\, e^{iu\hat{P}+iv\hat{X}}\, \vdots \tag{2.26}$$

从上面两式,我们有趣地发现算符 $e^{iu\hat{P}+iv\hat{X}}$ 的 Weyl 编序就是它本身,即

$$e^{iu\hat{P}+iv\hat{X}} = \vdots\, e^{iu\hat{P}+iv\hat{X}}\, \vdots. \tag{2.27}$$

最后,从式(2.18)可知,Weyl 对应此时就可以写为

$$H(\hat{X},\hat{P}) = \int dp dx\, h(x,p)\Delta(p,x) = \vdots\, h(\hat{X},\hat{P})\, \vdots, \tag{2.28}$$

上式说明了一个已经 Weyl 编序好了的算符$\vdots\, h(\hat{X},\hat{P})\, \vdots$的经典对应函数能够直接地由替代 $\hat{X} \to x, \hat{P} \to p$ 而得到. 此外,根据 Wigner 算符的正规乘积形式(2.3)与 Weyl 对应规则,能够很容易导出一些算符的正规乘积形式. 例如经典电流密度为

$$j(x') = \rho v = \frac{Q}{m}\delta(x-x')p, \tag{2.29}$$

式中:$\rho(x') = Q\delta(x-x')$ 表示位于 $x'$ 的电荷密度,$Q$ 是电量,$v = p/m$ 是它的速度. 根据 Weyl 对应规则,电流密度算符应该是

$$j(x') \to \hat{J} \equiv \int dp dx\, \frac{Q}{m}\delta(x-x')p\Delta(x,p). \tag{2.30}$$

将式(2.3)代入上式并积分,有

$$\hat{J}=\frac{Q}{m\sqrt{\pi}}:\mathrm{e}^{-(x'-\hat{X})^2}\hat{P}:,\tag{2.31}$$

再利用 $\hat{P}=\mathrm{i}(a^{\dagger}-a)/\sqrt{2}$,式(2.31)变为

$$\begin{aligned}\hat{J}&=\frac{\mathrm{i}Q}{\sqrt{2\pi}m}[a^{\dagger}:\mathrm{e}^{-(x'-\hat{X})^2}:-:\mathrm{e}^{-(x'-\hat{X})^2}:a]\\&=\frac{\mathrm{i}Q}{\sqrt{2\pi}m}\left[\frac{\hat{X}-\mathrm{i}\hat{P}}{\sqrt{2}}:\mathrm{e}^{-(x'-\hat{X})^2}:-:\mathrm{e}^{-(x'-\hat{X})^2}:\frac{\hat{X}+\mathrm{i}\hat{P}}{\sqrt{2}}\right]\\&=\frac{Q}{2\sqrt{\pi}m}[\hat{P}:\mathrm{e}^{-(x'-\hat{X})^2}:+:\mathrm{e}^{-(x'-\hat{X})^2}:\hat{P}]\\&=\frac{Q}{2m}[\delta(x'-\hat{X})\hat{P}+\hat{P}\delta(x'-\hat{X})],\end{aligned}\tag{2.32}$$

这里已经考虑了 $:\mathrm{e}^{-(x'-\hat{X})^2}:=|x'\rangle\langle x'|=\sqrt{\pi}\delta(x'-\hat{X})$,即有 $\hat{X}:\mathrm{e}^{-(x'-\hat{X})^2}:=:\mathrm{e}^{-(x'-\hat{X})^2}:\hat{X}$. 式(2.32)与文献[45]的结果吻合.

## 2.3 算符 $\hat{X}^m\hat{P}^r$ 的 Weyl 编序展开形式

Wigner算符的Weyl编序形式. 给出了把算符排为Weyl序的新方法,例:根据式(2.8)与式(2.6),计算出 $\hat{X}^m\hat{P}^r$ 的经典Weyl对应[46]:

$$\begin{aligned}2\pi\mathrm{tr}[\hat{X}^m\hat{P}^r\Delta(x,p)]&=\int\mathrm{d}u\mathrm{e}^{\mathrm{i}pu}\left(x-\frac{u}{2}\right)^m\left\langle x-\frac{u}{2}\right|\hat{P}^r\left|x+\frac{u}{2}\right\rangle\\&=\frac{1}{2\pi}\int\mathrm{d}u\mathrm{e}^{\mathrm{i}pu}\left(x-\frac{u}{2}\right)^m\int\mathrm{d}p'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'u'}p'^r\\&=\int\mathrm{d}u\mathrm{e}^{\mathrm{i}pu}\left(x-\frac{u}{2}\right)^m\frac{\partial^r}{\partial(-\mathrm{i}u)^r}\delta(u)\\&=(-\mathrm{i})^r\frac{\partial^r}{\partial u^r}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}pu}\left(x-\frac{u}{2}\right)^m\right]\bigg|_{u=0}\end{aligned}$$

$$= (-\mathrm{i})^r \sum_{j=0}^{\min(r,m)} \binom{r}{j} (\mathrm{i}p)^{r-j} \mathrm{e}^{\mathrm{i}pu} \frac{\partial^j}{\partial u^j} \left(x - \frac{u}{2}\right)^m \Big|_{u=0}$$

$$= \sum_{j=0}^{\min(r,m)} \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^j \binom{r}{j} \binom{m}{j} j\,! x^{m-j} p^{r-j}. \tag{2.33}$$

由式(2.12) 与式(2.19)，有

$$\begin{aligned}
\hat{X}^m \hat{P}^r &= \int \mathrm{d}p \mathrm{d}x \sum_{j=0}^{\min(r,m)} \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^j \binom{r}{j} \binom{m}{j} j\,! x^{m-j} p^{r-j} \Delta(p,x) \\
&= \int \mathrm{d}p \mathrm{d}x \sum_{j=0}^{\min(r,m)} \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^j \binom{r}{j} \binom{m}{j} j\,! x^{m-j} p^{r-j} \vdots\, \delta(x-\hat{X})\delta(p-\hat{P}) \,\vdots \\
&= \sum_{j=0}^{\min(r,m)} \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^j \frac{m\,! r\,!}{j\,!(m-j)\,!(r-j)\,!} \vdots\, \hat{X}^{m-j} \hat{P}^{r-j} \,\vdots \\
&= \sum_{j=0}^{\min(r,m)} \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^j \frac{m\,! r\,!}{j\,!(m-j)\,!(r-j)\,!} W_{m-j,r-j},
\end{aligned} \tag{2.34}$$

式中已令

$$W_{m,r} \equiv \vdots\, \hat{X}^m \hat{P}^r \,\vdots. \tag{2.35}$$

式(2.34) 正是 $\hat{X}^m \hat{P}^r$ 的 Weyl 编序展开形式，其相应的厄米共轭形式为

$$\begin{aligned}
\hat{P}^r \hat{X}^m &= (\hat{X}^m \hat{P}^r)^\dagger \\
&= \sum_{j=0}^{\min(r,m)} \left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^j \frac{m\,! r\,!}{j\,!(m-j)\,!(r-j)\,!} W^\dagger_{m-j,r-j}.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

根据式(2.34) 的结果，得

$$\hat{X}\hat{P} = W_{1,1} - \frac{\mathrm{i}}{2} W_{0,0}, \quad W_{0,0} \equiv 1, \tag{2.37}$$

$$\hat{X}^2 \hat{P} = W_{2,1} + \mathrm{i} W_{1,0}, \tag{2.38}$$

$$\hat{X}^2 \hat{P}^2 = W_{2,2} + 2\mathrm{i} W_{1,1} - \frac{1}{2} W_{0,0}, \tag{2.39}$$

$$\hat{X}^3 \hat{P}^2 = W_{3,2} + 3\mathrm{i} W_{2,1} - \frac{3}{2} W_{1,0}, \tag{2.40}$$

$$\hat{P}^2 \hat{X}^3 = W_{3,2} - 3\mathrm{i} W_{2,1} - \frac{3}{2} W_{1,0}. \tag{2.41}$$

考虑到双变量 Hermite 多项式的定义

$$\mathrm{H}_{m,n}(\xi,\xi^*) = \sum_{l=0}^{\min(m,n)} \frac{m!n!(-1)^l \xi^{m-l} \xi^{*n-1}}{l!(m-l)!(n-l)!}, \tag{2.42}$$

将式(2.34) 改写为

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{2}\hat{X})^m (\mathrm{i}\sqrt{2}\hat{P})^r \\
&= \sum_{j=0}^{\min(r,m)} \frac{(-1)^j m!r!}{j!(m-j)!(r-j)!} \vdots (\sqrt{2}\hat{X})^{m-j}(\mathrm{i}\sqrt{2}\hat{P})^{r-j} \vdots \\
&= \vdots\, \mathrm{H}_{m,r}(\sqrt{2}\hat{X}, \mathrm{i}\sqrt{2}\hat{P}) \,\vdots,
\end{aligned} \tag{2.43}$$

这是一个新的算符等式. 根据 $\mathrm{H}_{m,n}(\xi,\xi^*)$ 的递推公式

$$\mathrm{H}_{m+1,n}(\xi,\xi^*) + n\mathrm{H}_{m,n-1}(\xi,\xi^*) = \xi^* \mathrm{H}_{m,n}(\xi,\xi^*), \tag{2.44}$$

可以直接得到

$$\begin{aligned}
&\vdots\, \mathrm{H}_{m+1,r}(\sqrt{2}\hat{X}, \mathrm{i}\sqrt{2}\hat{P}) \,\vdots + r \,\vdots\, \mathrm{H}_{m,r-1}(\sqrt{2}\hat{X}, \mathrm{i}\sqrt{2}\hat{P}) \,\vdots \\
&\quad = \mathrm{i}\sqrt{2} \,\vdots\, \hat{P}\mathrm{H}_{m,r}(\sqrt{2}\hat{X}, \mathrm{i}\sqrt{2}\hat{P}) \,\vdots,
\end{aligned} \tag{2.45}$$

结合式(2.43) 就有

$$(\sqrt{2}\hat{X})^m (2\mathrm{i}\hat{X}\hat{P} + r)(\mathrm{i}\sqrt{2}\hat{P})^{r-1} = \mathrm{i}\sqrt{2} \,\vdots\, \hat{P}\mathrm{H}_{m,r}(\sqrt{2}\hat{X}, \mathrm{i}\sqrt{2}\hat{P}) \,\vdots. \tag{2.46}$$

可以进一步验证式(2.43),根据 $\mathrm{H}_{m,n}(\xi,\xi^*)$ 产生函数

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{t^m t'^n}{m!n!} \mathrm{H}_{m,n}(\xi,\xi^*) = \exp(-tt' + t\xi + t'\xi^*), \tag{2.47}$$

$$\mathrm{H}_{m,n}(\xi,\xi^*) = \frac{\partial^{m+n}}{\partial t^m \partial t'^n} \exp(-tt' + t\xi + t'\xi^*) \big|_{t=t'=0} \tag{2.48}$$

以及式(2.43),可以看出

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{z\hat{X}} \mathrm{e}^{z'\hat{P}} &= \sum_{m,r=0}^{\infty} \frac{z^m z'^r}{m!r!} \hat{X}^m \hat{P}^r \\
&= \sum_{m,r=0}^{\infty} \frac{z^m z'^r}{m!r!} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m+r} (-\mathrm{i})^r \,\vdots\, \mathrm{H}_{m,r}(\sqrt{2}\hat{X}, \mathrm{i}\sqrt{2}\hat{P}) \,\vdots \\
&= \vdots\, \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2} zz' + z\hat{X} + z'\hat{P}\right) \vdots
\end{aligned} \tag{2.49}$$

另一方面，根据式(2.27)，直接有

$$e^{z\hat{X}}e^{z'\hat{P}} = \exp\left(\frac{izz'}{2} + z\hat{X} + z'\hat{P}\right) = \vdots \exp\left(\frac{izz'}{2} + z\hat{X} + z'\hat{P}\right)\vdots. \tag{2.50}$$

从而说明了式(2.43)结果的正确性.

最后，根据式(2.43)与Weyl对应规则式(2.28)，有

$$(\sqrt{2}\hat{X})^m(\mathrm{i}\sqrt{2}\hat{P})^r = \int \mathrm{d}x\mathrm{d}p\mathrm{H}_{m,r}(\sqrt{2}x,\mathrm{i}\sqrt{2}p)\Delta(x,p) \tag{2.51}$$

根据Wigner算符的正规乘积形式，又可进一步给出其正规乘积，将式(2.3)代入上式并用式(2.48)，得到

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{2}\hat{X})^m(\mathrm{i}\sqrt{2}\hat{P})^r \\
&= \frac{1}{\pi}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}p\mathrm{H}_{m,r}(\sqrt{2}x,\mathrm{i}\sqrt{2}p) :\exp[-(x-\hat{X})^2-(p-\hat{P})^2]: \\
&= \frac{\partial^{m+r}}{\partial t^m\partial t'^r}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}p :\exp[-tt'+\sqrt{2}xt+\sqrt{2}\mathrm{i}pt'-(x-\hat{X})^2- \\
&\quad (p-\hat{P})^2]:|_{t=t'=0} \\
&= \frac{\partial^{m+r}}{\partial t^m\partial t'^r} :\exp\left[\frac{t^2}{2}+\sqrt{2}t\hat{X}-\frac{t'^2}{2}+2\frac{t'}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{i}\hat{P}-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]:|_{t=t'=0} \\
&= \frac{\partial^m}{\sqrt{2^r}\partial t^m} :\exp\left(\frac{t^2}{2}+\sqrt{2}t\hat{X}\right)\mathrm{H}_r\left(\mathrm{i}\hat{P}-\frac{t}{\sqrt{2}}\right):\Big|_{t=0} \\
&= \sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\frac{\partial^l}{\sqrt{2^r}\partial t^l} :\exp\left[-\frac{(\mathrm{i}t)^2}{2}+\right. \\
&\quad \left. 2\frac{\mathrm{i}t}{\sqrt{2}}\frac{\hat{X}}{\mathrm{i}}\right]\frac{\partial^{m-l}}{\partial t^{m-l}}\mathrm{H}_r\left(\mathrm{i}\hat{P}-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\Big|_{t=0}: \\
&= \frac{(-1)^m m!}{\sqrt{2^{r-m}}}\sum_{l=0}^{m}\binom{r}{m-l}\frac{1}{l!(2\mathrm{i})^l} :\mathrm{H}_l(-\mathrm{i}\hat{X})\mathrm{H}_{r-m+l}(\mathrm{i}\hat{P}):,
\end{aligned} \tag{2.52}$$

式中：已利用了有关单变量Hermite多项式的公式

$$\mathrm{H}_m(x)=\frac{\partial^m}{\partial t^m}\exp(-t^2+2tx)\mid_{t=0},\tag{2.53}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^s\mathrm{H}_m(x)=\frac{2^s m!}{(m-s)!}\mathrm{H}_{m-s}(x),\tag{2.54}$$

所以

$$\hat{X}^m\hat{P}^r=\frac{(-1)^m m!}{(2\mathrm{i})^r}\sum_{l=0}^{m}\binom{r}{m-l}\frac{1}{l!(2\mathrm{i})^l}:\mathrm{H}_l(-\mathrm{i}\hat{X})\mathrm{H}_{r-m+l}(\mathrm{i}\hat{P}):,\tag{2.55}$$

同样地，从式(2.43)、式(2.48)与 Weyl 对应规则，有

$$\begin{aligned}&[(\sqrt{2}\hat{X})^m(\mathrm{i}\sqrt{2}\hat{P})^r]^\dagger\\&=(-\mathrm{i}\sqrt{2}\hat{P})^r(\sqrt{2}\hat{X})^m\\&=[\vdots\ \mathrm{H}_{m,r}(\sqrt{2}\hat{X},\mathrm{i}\sqrt{2}\hat{P})\ \vdots]^\dagger\\&=\int\mathrm{d}p\mathrm{d}x\mathrm{H}_{m,r}(\sqrt{2}x,-\mathrm{i}\sqrt{2}p)\Delta(p,x)\\&=\frac{1}{\pi}\int\mathrm{d}p\mathrm{d}x\mathrm{H}_{m,r}(\sqrt{2}x,-\mathrm{i}\sqrt{2}p):\mathrm{e}^{-(x-\hat{X})^2-(p-\hat{P})^2}:\\&=\frac{\partial^{m+r}}{\partial t^m\partial t'^r}\int\mathrm{d}x\mathrm{d}p:\mathrm{e}^{-tt'+\sqrt{2}xt-\sqrt{2}\mathrm{i}pt'-(x-\hat{X})^2-(p-\hat{P})^2}:|_{t=t'=0}\\&=\frac{(-1)^m m!}{\sqrt{2^{r-m}}}\sum_{l=0}^{m}\binom{r}{m-l}\frac{1}{l!(2\mathrm{i})^l}:\mathrm{H}_l(-\mathrm{i}\hat{X})\mathrm{H}_{r-m+l}(-\mathrm{i}\hat{P}):,\end{aligned}\tag{2.56}$$

因而，就得到 $\hat{P}^r\hat{X}^m$ 的正规乘积形式

$$\hat{P}^r\hat{X}^m=\frac{(-1)^m m!}{(-2\mathrm{i})^r}\sum_{l=0}^{m}\binom{r}{m-l}\frac{1}{l!(2\mathrm{i})^l}:\mathrm{H}_l(-\mathrm{i}\hat{X})\mathrm{H}_{r-m+l}(-\mathrm{i}\hat{P}):.\tag{2.57}$$

## 2.4 任意算符的 Weyl 编序展开公式

### 2.4.1 算符 $G(a^\dagger,a)$ 的经典 Weyl 对应的一般公式

根据积分公式

$$\int \frac{d^2 z}{\pi}\exp(-\varepsilon |z|^2 + \zeta z + \xi z^*) = \frac{1}{\varepsilon}\exp\left(\frac{\zeta\xi}{\varepsilon}\right), \quad \mathrm{Re}\varepsilon > 0, \tag{2.58}$$

以及$\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger)$ 与$\hat{P} = \frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{2}}(a - a^\dagger)$，式(2.3) 变成

$$\begin{aligned}\Delta(x,p) &= \frac{1}{\pi} : \exp[-2(\alpha^* - a^\dagger)(\alpha - a)] : \\ &= \int \frac{d^2 z}{2\pi^2} : \exp\left[-\frac{1}{2}|z|^2 + z^*(\alpha - a) - z(\alpha^* - a^\dagger)\right] : \\ &= \int \frac{d^2 z}{2\pi^2}\exp[z^*(\alpha - a) - z(\alpha^* - a^\dagger)] \\ &\equiv \Delta(\alpha,\alpha^*),\end{aligned} \tag{2.59}$$

其中，$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + \mathrm{i}p)$. 另外，式(2.59) 也可改写成另一积分形式

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha,\alpha^*) &= \frac{1}{\pi} : \exp[-2(\alpha^* - a^\dagger)(\alpha - a)] : \\ &= \int \frac{d^2 z}{\pi^2} : \exp[-|z|^2 + (\alpha + z)a^\dagger + (\alpha^* - z^*)a - \\ &\quad a^\dagger a + \alpha z^* - z\alpha^* - |\alpha|^2] : ,\end{aligned} \tag{2.60}$$

然后考虑到 $|0\rangle\langle 0| = : e^{-a^\dagger a} :$ 以及相干态 $|z\rangle = \exp(-|z|^2/2 + za^\dagger)|0\rangle$，式(2.60) 变为

$$\Delta(\alpha,\alpha^*) = \int \frac{d^2 z}{\pi^2} |\alpha + z\rangle\langle \alpha - z| \, e^{\alpha z^* - z\alpha^*} \tag{2.61}$$

这就是范洪义首先给出的 Wigner 算符的相干态表象形式. 如果再对 $\Delta(\alpha,\alpha^*)$ 作 $d^2\alpha$ 积分，则有

$$2\int d^2\alpha\Delta(\alpha,\alpha^*) = \frac{2}{\pi}\int d^2\alpha : e^{-2(\alpha^*-a^\dagger)(\alpha-a)} := 1, \quad (2.62)$$

所以，任何一个算符 $G(a^\dagger,a)$ 可以用上述完备性展开

$$G(a^\dagger,a) = 2\int d^2\alpha g(\alpha^*,\alpha)\Delta(\alpha,\alpha^*). \quad (2.63)$$

实际上，式(2.63)与式(2.12)等价，只是形式上不同而已.

对于式(2.63)，如果两边取其相干态矩阵元并用式(2.59)以及 $\langle -z|z\rangle = e^{-2|z|^2}$，有

$$\begin{aligned}\langle -z|G(a^\dagger,a)|z\rangle &= 2\int d^2\alpha\langle -z|g(\alpha^*,\alpha)\Delta(\alpha,\alpha^*)|z\rangle \\ &= \frac{2}{\pi}\int d^2\alpha g(\alpha^*,\alpha)\langle -z| : e^{-2(\alpha^*-a^\dagger)(\alpha-a)} : |z\rangle \\ &= \frac{2}{\pi}\int d^2\alpha g(\alpha^*,\alpha) e^{2(\alpha z^*-z\alpha^*)} e^{-2|\alpha|^2}. \quad (2.64)\end{aligned}$$

由于 $\exp[2(\alpha z^* - z\alpha^*)]$ 可以看成一个傅里叶变换核，所以(2.64)的反变换是

$$g(\alpha^*,\alpha) = 2e^{2|\alpha|^2}\int \frac{d^2z}{\pi}\langle -z|G(a^\dagger,a)|z\rangle e^{-2(\alpha z^*-z\alpha^*)}, \quad (2.65)$$

这就是寻找算符 $G(a^\dagger,a)$ 经典对应的一般公式. 只要知道了算符 $G(a^\dagger,a)$ 的正规乘积表示，则相干态下的矩阵元 $\langle -z|G(a^\dagger,a)|z\rangle$ 立即可得，再由上式就可得到相应的经典对应.

例如，可计算算符 $a^{\dagger m}a^n$ 的经典对应 $g_1(\alpha^*,\alpha)$：

$$\begin{aligned}g_1(\alpha^*,\alpha) &= 2e^{2|\alpha|^2}\int \frac{d^2z}{\pi}\langle -z|a^{\dagger m}a^n|z\rangle e^{-2(\alpha z^*-z\alpha^*)} \\ &= 2(-1)^m e^{2|\alpha|^2}\int \frac{d^2z}{\pi} z^{*m}z^n e^{-2(|z|^2+\alpha z^*-z\alpha^*)} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m+n} H_{m,n}(\sqrt{2}\alpha^*,\sqrt{2}\alpha), \quad (2.66)\end{aligned}$$

这里 $H_{m,n}(\zeta,\xi)$ 是双变量厄米多项式并已用了相关的积分公式

$$\mathrm{H}_{m,n}(\zeta,\xi) = (-1)^m \mathrm{e}^{\zeta\xi}\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} z^{*m} z^n \exp[-|z|^2 - \zeta z + \xi z^*]. \tag{2.67}$$

根据积分公式(2.58),可计算算符 $\mathrm{e}^{\lambda a^\dagger a} =: \mathrm{e}^{(\mathrm{e}^\lambda - 1)a^\dagger a}:$ 的经典对应 $g_2(\alpha^*,\alpha)$:

$$\begin{aligned} g_2(\alpha^*,\alpha) &= 2\mathrm{e}^{2|\alpha|^2}\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}\langle -z|: \mathrm{e}^{(\mathrm{e}^\lambda-1)a^\dagger a}:|z\rangle \mathrm{e}^{-2(\alpha z^* - z\alpha^*)} \\ &= 2\mathrm{e}^{2|\alpha|^2}\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}\exp[-(\mathrm{e}^\lambda+1)|z|^2 - 2(\alpha z^* - z\alpha^*)] \\ &= \frac{2}{\mathrm{e}^\lambda+1}\exp\left[\frac{2(\mathrm{e}^\lambda-1)}{\mathrm{e}^\lambda+1}|\alpha|^2\right]. \end{aligned} \tag{2.68}$$

此外,式(2.65) 可以改写成

$$g(\alpha^*,\alpha) = 2\pi\mathrm{tr}\left[G(a^\dagger,a)\mathrm{e}^{2|\alpha|^2}\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi^2}|z\rangle\langle -z|\,\mathrm{e}^{-2(\alpha z^* - z\alpha^*)}\right]. \tag{2.69}$$

利用积分公式(2.58) 和相干态 $|z\rangle = \exp(-|z|^2/2 + za^\dagger)|0\rangle$,并考虑 $|0\rangle\langle 0| =: \mathrm{e}^{-a^\dagger a}:$,可证明

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{2|\alpha|^2}\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi^2}|z\rangle\langle -z|\,\mathrm{e}^{-2(\alpha z^* - z\alpha^*)} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi^2}:\exp[-|z|^2 + (\alpha+z)a^\dagger + (\alpha^* - z^*)a - \\ &\quad a^\dagger a + \alpha z^* - z\alpha^* - |\alpha|^2]: \\ &= \frac{1}{\pi}:\exp[-2(\alpha^* - a^\dagger)(\alpha - a)]: \\ &= \Delta(\alpha,\alpha^*), \end{aligned} \tag{2.70}$$

上式左边就是 Wigner 算符的相干态表象中的另一种形式. 所以,由式(2.69) 与式(2.70),看出式(2.63) 的逆变换

$$g(\alpha^*,\alpha) = 2\pi\mathrm{tr}[G(a^\dagger,a)\Delta(\alpha,\alpha^*)]. \tag{2.71}$$

### 2.4.2 任意算符的 Weyl 编序展开公式

根据式(2.65) 和式(2.4) 可以计算出平移算符 $D(\beta) =$

$e^{\beta a^\dagger-\beta^* a}$的经典对应

$$
\begin{aligned}
&g_3(\alpha^*,\alpha)\\
&=2e^{2|\alpha|^2}\int\frac{d^2z}{\pi}\langle -z|\ e^{\beta a^\dagger-\beta^* a}\ |z\rangle e^{-2(\alpha z^*-z\alpha^*)}\\
&=2e^{2|\alpha|^2-|\beta|^2/2}\int\frac{d^2z}{\pi}\langle -z|\ e^{\beta a^\dagger}e^{-\beta^* a}\ |z\rangle e^{-2(\alpha z^*-z\alpha^*)}\\
&=2e^{2|\alpha|^2-|\beta|^2/2}\int\frac{d^2z}{\pi}\exp[-2|z|^2-2(\alpha z^*-z\alpha^*)-z^*\beta-\beta^* z]\\
&=e^{\beta\alpha^*-\beta^*\alpha},
\end{aligned}
\tag{2.72}
$$

由式(2.63),有

$$
e^{\beta a^\dagger-\beta^* a}=2\int d^2\alpha\Delta(\alpha,\alpha^*)e^{\beta\alpha^*-\beta^*\alpha}. \tag{2.73}
$$

另一方面,根据式(2.27),并考虑 $\hat{X}=\frac{1}{\sqrt{2}}(a+a^\dagger),\hat{P}=\frac{1}{i\sqrt{2}}(a-a^\dagger)$,有

$$
e^{\beta a^\dagger-\beta^* a}=\vdots\ e^{\beta a^\dagger-\beta^* a}\ \vdots. \tag{2.74}
$$

从式(2.73)与式(2.74)可知,Wigner算符 $\Delta(\alpha,\alpha^*)$ 的 Weyl 编序形式为

$$
\Delta(\alpha,\alpha^*)=\frac{1}{2}\vdots\ \delta(a^\dagger-\alpha^*)\delta(a-\alpha)\ \vdots. \tag{2.75}
$$

将式(2.75)与式(2.65)代入式(2.63),有

$$
\begin{aligned}
G(a^\dagger,a)&=2\int d^2\alpha g(\alpha,\alpha^*)\Delta(\alpha,\alpha^*)\\
&=\int d^2\alpha\ \vdots\ \delta(a^\dagger-\alpha^*)\delta(a-\alpha)\ \vdots\ 2e^{2|\alpha|^2}\cdot\\
&\quad\int\frac{d^2z}{\pi}\langle -z|\ G(a^\dagger,a)\ |z\rangle e^{-2(\alpha z^*-z\alpha^*)}\\
&=2\ \vdots\int\frac{d^2z}{\pi}\langle -z|\ G(a^\dagger,a)\ |z\rangle e^{2(a^\dagger a+az^*-za^\dagger)}\ \vdots,
\end{aligned}
\tag{2.76}
$$

这就是范氏给出的将任意算符化为其Weyl编序的一般公式,可见

Weyl 编序符号的引入十分必要. 特别，当 $G(a^\dagger,a)$ 是单位 1 时，由式(2.76) 得到

$$1 = 2\int \frac{d^2 z}{\pi} \vdots \exp[-(z^* + a^\dagger)(z - a)] \vdots. \qquad (2.77)$$

只要我们知道了算符 $G(a^\dagger,a)$ 的正规乘积表示，则相干态下的矩阵元 $\langle -z|\, G(a^\dagger,a)\, |z\rangle$ 立即可得，再根据式(2.76) 就可得到相应的 Weyl 编序形式.

举例说明，计算算符 $a^{\dagger m}a^n$ 的 Weyl 编序：

$$\begin{aligned} a^{\dagger m}a^n &= 2 \vdots \int \frac{d^2 z}{\pi} \langle -z|\, a^{\dagger m}a^n\, |z\rangle \exp[2(a^\dagger a + a z^* - z a^\dagger)] \vdots \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m+n} \vdots \mathrm{H}_{m,n}(\sqrt{2}a^\dagger, \sqrt{2}a) \vdots, \end{aligned} \qquad (2.78)$$

这里 $\mathrm{H}_{m,n}(\zeta,\xi)$ 是双变量厄米多项式以及已用了积分公式(2.67). 同样方法，可计算算符 $e^{\lambda a^\dagger a} = : e^{(e^\lambda - 1)a^\dagger a} :$ 的 Weyl 编序：

$$\begin{aligned} e^{\lambda a^\dagger a} &= 2 \vdots \int \frac{d^2 z}{\pi} \langle -z| : e^{(e^\lambda - 1)a^\dagger a} : |z\rangle \exp[2(a^\dagger a + a z^* - z a^\dagger)] \vdots \\ &= 2 \vdots \int \frac{d^2 z}{\pi} \exp[-(e^\lambda + 1)\, |z|^2 + 2(a^\dagger a + a z^* - z a^\dagger)] \vdots \\ &= \frac{2}{e^\lambda + 1} \vdots \exp\left[\frac{2(e^\lambda - 1)}{e^\lambda + 1} a^\dagger a\right] \vdots. \end{aligned} \qquad (2.79)$$

通过比较式(2.66) 与式(2.78)，以及式(2.68) 与式(2.79)，得到以下对应规则：一个 Weyl 编序好了的算符 $\vdots\, g(a,a^\dagger) \,\vdots$，其经典对应 $g(\alpha,\alpha^*)$ 可以直接由 $\vdots\, g(a,a^\dagger) \,\vdots$ 进行简单的替换 $a \to \alpha$，$a^\dagger \to \alpha^*$ 得到.

再例如计算算符 $a^n a^{\dagger m}$ 的 Weyl 编序，先根据相干态的完备性 $\int \frac{d^2 z}{\pi} |z\rangle\langle z| = 1$ 以及式(2.67) 求出其正规乘积形式

$$\begin{aligned} a^n a^{\dagger m} &= \int \frac{d^2 z}{\pi} a^n\, |z\rangle\langle z|\, a^{\dagger m} \\ &= \int \frac{d^2 z}{\pi} z^n z^{*m} : \exp(-|z|^2 + z a^\dagger + z^* a - a^\dagger a) : \end{aligned}$$

$$= (-\mathrm{i})^{m+n} \,\colon \mathrm{H}_{m,n}(\mathrm{i}a^{\dagger},\mathrm{i}a) \colon, \tag{2.80}$$

再代入到式(2.76),就有

$$\begin{aligned} a^n a^{\dagger m} &= 2(-\mathrm{i})^{m+n} \,\vdots \int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} \langle -z| \colon \mathrm{H}_{m,n}(\mathrm{i}a^{\dagger},\mathrm{i}a) \colon |z\rangle \mathrm{e}^{2(a^{\dagger}a+az^*-za^{\dagger})} \,\vdots \\ &= 2(-\mathrm{i})^{m+n} \,\vdots \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \frac{(-1)^k m!n!(-\mathrm{i})^{m-k}\mathrm{i}^{n-k}}{k!(m-k)!(n-k)!} \cdot \\ &\quad \int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} z^{n-k} z^{*m-k} \exp(-2|z|^2 - 2za^{\dagger} + 2az^* + 2a^{\dagger}a) \,\vdots \\ &= \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \frac{(-1)^k m!n!(1/\sqrt{2})^{m+n}}{k!(m-k)!(n-k)!} \,\vdots\, \mathrm{H}_{m-k,n-k}(\sqrt{2}a^{\dagger},\sqrt{2}a) \,\vdots. \end{aligned} \tag{2.81}$$

## 2.5 Weyl 编序算符内的积分技术(IWWOP)

在 Weyl 对应规则和 Wigner 算符的基础上，我们给出 Weyl 编序算符内积分技术(the technique of integration within Weyl ordered product of operators，IWWOP) 的性质[12,43]：

(1) 玻色算符 $a,a^{\dagger}$在 Weyl 编序记号$\vdots\ \vdots$内部是对易的.

(2) 可以对$\vdots\ \vdots$内部的 $c$ 数进行积分运算,只要该积分收敛.

(3) $\vdots\ \vdots$记号内部的$\vdots\ \vdots$记号可以取消.

(4) Wigner 算符的 Weyl 编序形式为

$$\Delta(x,p) = \,\vdots\, \delta(x-\hat{X})\delta(p-\hat{P}) \,\vdots \tag{2.82}$$

或

$$\Delta(\alpha,\alpha^*) = \frac{1}{2} \,\vdots\, \delta(a^{\dagger}-\alpha^*)\delta(a-\alpha) \,\vdots, \tag{2.83}$$

这样 Weyl 对应规则本身可以纳入 Weyl 编序形式

$$\int \mathrm{d}p\mathrm{d}x f(x,p)\Delta(p,q) = \,\vdots\, f(\hat{X},\hat{P}) \,\vdots \tag{2.84}$$

或

$$2\int d^2\alpha g(\alpha,\alpha^*)\Delta(\alpha,\alpha^*) = \vdots\, g(a,a^\dagger)\,\vdots. \tag{2.85}$$

例如

$$\int dp dx x^m p^n \,\vdots\, \delta(x-\hat{X})\delta(p-\hat{P})\,\vdots = \vdots\, \hat{X}^m\hat{P}^n\,\vdots, \tag{2.86}$$

注意:欲将$\vdots\, \hat{X}^m\hat{P}^n\,\vdots$的$\vdots\ \vdots$移去,必须先重排为

$$\vdots\left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\hat{X}^{m-l}\hat{P}^n\hat{X}^l\,\vdots, \tag{2.87}$$

而后才能移去$\vdots\ \vdots$.

值得一提的是由 Weyl 对应规则式(2.84) 或式(2.85),并考虑$\Delta(\alpha,\alpha^*)$正规乘积形式如式(2.60),就可以把 Weyl编序算符化为正规乘积形式,例如:

$$\begin{aligned}\vdots\, e^{-(\beta^*+a^\dagger)(\beta-a)}\,\vdots &= 2\int d^2\alpha e^{-(\beta^*+\alpha^*)(\beta-\alpha)}\Delta(\alpha,\alpha^*)\\ &= 2\int \frac{d^2\alpha}{\pi} e^{-(\beta^*+\alpha^*)(\beta-\alpha)} : e^{-2(\alpha^*-a^\dagger)(\alpha-a)} :\\ &= 2\int \frac{d^2\alpha}{\pi} : e^{-|\alpha|^2+\alpha(2a^\dagger+\beta^*)+\alpha^*(2a-\beta)-2a^\dagger a-|\beta|^2} :\\ &= 2 : e^{-2(\beta^*+a^\dagger)(\beta-a)} :.\end{aligned} \tag{2.88}$$

(5) Weyl 编序在相似变换下具有序不变性. 设 $S$ 为一个相似变换算符,则有

$$S\,\vdots(\cdots)\vdots\, S^{-1} = \vdots\, S(\cdots)S^{-1}\,\vdots, \tag{2.89}$$

即相似变换能够"穿越"Weyl 编序记号$\vdots\ \vdots$的边界,直接对玻色算符进行相似变换.

下面就来证明这个结论. 假设算符 $S$ 能产生如下相似变换[44,49]

$$SaS^{-1} = \mu a + \nu a^\dagger, \quad Sa^\dagger S^{-1} = \sigma a + \tau a^\dagger, \tag{2.90}$$

式中:$\mu,\nu,\sigma,\tau$ 满足 $\mu\tau - \sigma\nu = 1$,且有

$$[\mu a + \nu a^\dagger, \sigma a + \tau a^\dagger] = 1. \tag{2.91}$$

根据式(2.59) 和式(2.90)

$$S\Delta(\alpha,\alpha^*)S^{-1}$$

$$= S\int \frac{d^2 z}{2\pi^2}\exp[z^*(\alpha - a) - z(\alpha^* - a^\dagger)]S^{-1}$$

$$= \int \frac{d^2 z}{2\pi^2} :\exp\Big[-|z|^2\left(\sigma\nu + \frac{1}{2}\right) + z(\sigma a + \tau a^\dagger - \alpha^*) -$$

$$z^*(\mu a + \nu a^\dagger - \alpha) + \frac{1}{2}(\sigma\tau z^2 + \mu\nu z^{*2})\Big]:$$

$$= \frac{1}{\pi} :\exp[-2(a^\dagger - \mu\alpha^* + \sigma\alpha)(a - \tau\alpha + \nu\alpha^*)]:, \tag{2.92}$$

与 $\Delta(\alpha,\alpha^*) = \frac{1}{\pi} :\exp[-2(\alpha^* + a^\dagger)(\alpha - a)]:$ 比较,

$$S\Delta(\alpha,\alpha^*)S^{-1} = \Delta(\tau\alpha - \nu\alpha^*, \mu\alpha^* - \sigma\alpha). \tag{2.93}$$

另一方面,对于任意一个算符 $G(a^\dagger,a)$,有 $SG(a^\dagger,a)S^{-1} = G(\mu a + \nu a^\dagger, \sigma a + \tau a^\dagger)$,将 $S$ 作用于式(2.85)的两边,并利用式(2.93)和 $\mu\tau - \sigma\nu = 1$,可得

$$SG(a^\dagger,a)S^{-1} = 2\int d^2\alpha g(\alpha,\alpha^*)S\Delta(\alpha,\alpha^*)S^{-1}$$

$$= 2\int d^2\alpha g(\alpha,\alpha^*)\Delta(\tau\alpha - \nu\alpha^*, \mu\alpha^* - \sigma\alpha)$$

$$= 2\int d^2\alpha g(\mu\alpha + \nu\alpha^*, \sigma\alpha + \tau\alpha^*)\Delta(\alpha,\alpha^*)$$

$$= \int d^2\alpha g(\mu\alpha + \nu\alpha^*, \sigma\alpha + \tau\alpha^*) \vdots \delta(a^\dagger - \alpha^*)\delta(a - \alpha) \vdots$$

$$= \vdots g(\mu a + \nu a^\dagger, \sigma a + \tau a^\dagger) \vdots, \tag{2.94}$$

至此,就证明了

$$S \vdots g(a,a^\dagger) \vdots S^{-1} = \vdots g(\mu a + \nu a^\dagger, \sigma a + \tau a^\dagger) \vdots, \tag{2.95}$$

即 Weyl 编序算符在相似变换下是有序不变的,这个性质是十分有用的.

## 2.6 纯相干态密度算符的 Weyl 编序形式及其应用

对于一个纯相干态密度算符 $|\beta\rangle\langle\beta|$ 的 Weyl编序形式. 利用式(2.76) 以及 $\langle\beta|z\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}(|z|^2+|\beta|^2)+\beta^* z\right]$,有

$$
\begin{aligned}
|\beta\rangle\langle\beta| &= 2 \vdots \int \frac{d^2 z}{\pi}\langle -z|\beta\rangle\langle\beta|z\rangle \exp[2(z^* a - a^\dagger z + a^\dagger a)] \vdots \\
&= 2 \vdots \exp[-2(\beta - a)(\beta^* - a^\dagger)] \vdots \\
&= 2 \vdots \exp[-(p-\hat{P})^2 - (x-\hat{X})^2] \vdots ,
\end{aligned} \tag{2.96}
$$

这里:$\beta = (x+\mathrm{i}p)/\sqrt{2}$,$\hat{P} = \frac{a-a^\dagger}{\sqrt{2}\mathrm{i}}$ 与 $\hat{X} = \frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}$ 分别是动量算符与坐标算符. 因而纯相干态密度算符 $|\beta\rangle\langle\beta|$ 的 Weyl编序形式在 $x$-$p$ 相空间中是一个 Gauss 型. 当 $\beta=0$ 时,得到真空态 $|0\rangle\langle 0|$ 的 Weyl 编序形式为

$$
|0\rangle\langle 0| = 2 \vdots \exp(-2a^\dagger a) \vdots . \tag{2.97}
$$

作为式(2.96) 的一个直接结果,那就是根据相干态的完备性,有

$$
\int \frac{d^2\beta}{\pi}|\beta\rangle\langle\beta| = 2\int \frac{d^2\beta}{\pi} \vdots \exp[-2(\beta-a)(\beta^*-a^\dagger)] \vdots = 1, \tag{2.98}
$$

这就是包含 Weyl 编序的积分. 此外,

$$
\int dp\ |\beta\rangle\langle\beta| = 2\sqrt{\pi} \vdots e^{-(x-\hat{X})^2} \vdots = 2\sqrt{\pi}e^{-(x-\hat{X})^2}, \tag{2.99}
$$

和

$$
\int dx\ |\beta\rangle\langle\beta| = 2\sqrt{\pi} \vdots e^{-(p-\hat{P})^2} \vdots = 2\sqrt{\pi}e^{-(p-\hat{P})^2}, \tag{2.100}
$$

这展现了纯相干态密度算符的边缘分布分别是 Gauss 型坐标与动量算符.

接下来,计算 $|\beta\rangle\langle -\beta|$ 的 Weyl 编序形式,即

$$|\beta\rangle\langle-\beta| = 2 \vdots \int \frac{d^2 z}{\pi} \, |\langle-\beta|z\rangle|^2 \exp[2(z^* a - a^\dagger z + a^\dagger a)] \vdots$$

$$= 2 \vdots \int \frac{d^2 z}{\pi} \exp[-|\beta|^2 - |z|^2 - \beta^* z - \beta z^* +$$

$$2(z^* a - a^\dagger z + a^\dagger a)] \vdots$$

$$= 2 \vdots \exp(2a^\dagger \beta - 2\beta^* a - 2a^\dagger a) \vdots, \qquad (2.101)$$

然后根据 Weyl 编序在相似变换下是序不变的以及平移算符的性质

$$D(\alpha) a D^{-1}(\alpha) = a - \alpha, \quad D(\alpha) a^\dagger D^{-1}(\alpha) = a^\dagger - \alpha^*, \qquad (2.102)$$

有

$$D(\alpha)\, |\beta\rangle\langle-\beta|\, D^\dagger(\alpha)$$

$$= 2D(\alpha) \vdots \exp(2a^\dagger \beta - 2\beta^* a - 2a^\dagger a) \vdots D^\dagger(\alpha)$$

$$= 2 \vdots \exp[-2\beta^*(a-\alpha) + 2(a^\dagger - \alpha^*)\beta -$$

$$2(a^\dagger - \alpha^*)(a - \alpha)] \vdots. \qquad (2.103)$$

另外，从

$$D(\alpha) D(\beta)\, |0\rangle = D(\alpha+\beta) e^{\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^* \beta)}\, |0\rangle, \qquad (2.104)$$

与

$$\langle-\beta|\, D^\dagger(\alpha) = \langle 0|\, D^\dagger(-\beta) D^\dagger(\alpha) = \langle 0|\, [D(\alpha) D(-\beta)]^\dagger$$

$$= \langle 0|\, D(\beta - \alpha) e^{\frac{1}{2}(\alpha\beta^* - \alpha^* \beta)}, \qquad (2.105)$$

看出

$$D(\alpha)\, |\beta\rangle\langle-\beta|\, D^\dagger(\alpha) = D(\alpha+\beta)\, |0\rangle\langle 0|\, D(\beta-\alpha) e^{\alpha\beta^* - \alpha^* \beta}$$

$$= |\alpha+\beta\rangle\langle\alpha-\beta|\, e^{\alpha\beta^* - \alpha^* \beta}. \qquad (2.106)$$

将式(2.103) 与式(2.106) 相比较，并考虑 Wigner 算符的相干态表象形式(2.61)，就有

$$\Delta(\alpha, \alpha^*) = \int \frac{d^2 \beta}{\pi^2} \, |\alpha+\beta\rangle\langle\alpha-\beta|\, e^{\alpha\beta^* - \alpha^* \beta}$$

$$= 2 \int \frac{d^2 \beta}{\pi^2} \vdots \exp[-2\beta^*(a-\alpha) + 2(a^\dagger - \alpha^*)\beta -$$

$$2(a^\dagger - \alpha^*)(a-\alpha)] \vdots$$

$$= \frac{1}{2} \vdots \delta(a^\dagger - \alpha^*)\delta(a-\alpha) \vdots. \tag{2.107}$$

最后,根据相干态表象中的 $P$ 表示[21] 并结合式(2.96),就有

$$\rho = \int \frac{d^2\beta}{\pi} P(\beta) \ |\beta\rangle\langle\beta|$$

$$= 2\int \frac{d^2\beta}{\pi} P(\beta) \vdots e^{-2(\beta-a)(\beta^*-a^\dagger)} \vdots. \tag{2.108}$$

这就说明一旦知道被给算符的 $P$ 表示 $P(\beta)$,则就能通过上式积分得到它的 Weyl 编序形式. 在第 1 章里知,算符的反正规乘积形式直接决定该算符的 $P$ 表示. 这就提供另外一种方法求算符的 Weyl 编序形式.

例如,根据算符 $e^{\lambda a^\dagger a}$ 的反正规乘积形式,即 $e^{\lambda a^\dagger a} = e^{-\lambda} \vdots \exp[(1-e^{-\lambda})a^\dagger a] \vdots$ 和式(2.108),得到 $e^{\lambda a^\dagger a}$ 的 Weyl 编序形式为

$$e^{\lambda a^\dagger a} = e^{-\lambda}\int \frac{d^2\beta}{\pi} \exp[(1-e^{-\lambda}) \ |\beta|^2] \ |\beta\rangle\langle\beta|$$

$$= 2\int \frac{d^2\beta}{\pi} \vdots \exp[-(1+e^{-\lambda}) \ |\beta|^2 + 2\beta^* a + 2\beta a^\dagger - 2a^\dagger a] \vdots$$

$$= \frac{2}{e^\lambda + 1} \vdots \exp\left[\frac{2(e^\lambda - 1)}{e^\lambda + 1} a^\dagger a\right] \vdots, \tag{2.109}$$

与式(2.79) 的结果完全一样. 同样的方法,有

$$e^{fa^2} e^{ga^{\dagger 2}} = 2\int \frac{d^2\beta}{\pi} \vdots \exp[-2(a^\dagger - \beta^*)(a-\beta) + f\beta^2 + g\beta^{*2}] \vdots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-fg}} \vdots \exp\left[\frac{fa^2 + ga^{\dagger 2} + 2fga^\dagger a}{1-fg}\right] \vdots, \tag{2.110}$$

这里用了积分公式

$$\int \frac{d^2 z}{\pi} \exp(\zeta \ |z|^2 + \xi z + \eta z^* + fz^2 + gz^{*2})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 4fg}} \exp\left[\frac{-\zeta\xi\eta + \xi^2 g + \eta^2 f}{\zeta^2 - 4fg}\right], \tag{2.111}$$

其满足 $\mathrm{Re}(\zeta+f+g)<0, \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta^2-4fg}{\zeta+f+g}\right)<0$，或者 $\mathrm{Re}(\zeta-f-g)<0, \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta^2-4fg}{\zeta-f-g}\right)<0$.

最后一个例子计算旋转算符 $\exp(-\mathrm{i}\hat{J}_y\theta)$ 的 Weyl 编序形式，其中 $\hat{J}_y=\frac{1}{2\mathrm{i}}(a^\dagger b-b^\dagger a)$ 为角动量算符，$[b,b^\dagger]=1$. 在文献[32]中已给出了 $\exp(-\mathrm{i}\hat{J}_y\theta)$ 的反正规乘积形式

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{J}_y\theta}=\vdots\exp\left[2(a^\dagger a+b^\dagger b)\sin^2\frac{\theta}{4}-(a^\dagger b-b^\dagger a)\sin\frac{\theta}{4}\right]\vdots. \tag{2.112}$$

将式(2.112) 代入到式(2.108) 的双模情形表达式，有

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{J}_y\theta}&=\int\frac{\mathrm{d}^2\beta\mathrm{d}^2\alpha}{\pi^2}\mathrm{e}^{2(|\beta|^2+|\alpha|^2)\sin^2\frac{\theta}{4}-(\alpha^*\beta-\beta^*\alpha)\sin\frac{\theta}{4}}\ |\alpha,\beta\rangle\langle\alpha,\beta|\\&=4\int\frac{\mathrm{d}^2\beta\mathrm{d}^2\alpha}{\pi^2}\vdots\,\mathrm{e}^{2(|\beta|^2+|\alpha|^2)\sin^2\frac{\theta}{4}-(\alpha^*\beta-\beta^*\alpha)\sin\frac{\theta}{4}-2[(a^\dagger-\alpha^*)(a-\alpha)+(b^\dagger-\beta^*)(b-\beta)]}\,\vdots\\&=\mathrm{sech}^2\frac{\theta}{4}\vdots\exp\left[2(ab^\dagger-ba^\dagger)\tanh\frac{\theta}{4}\right]\vdots,\end{aligned} \tag{2.113}$$

这就是 $\exp(-\mathrm{i}\hat{J}_y\theta)$ 的 Weyl 编序形式. 根据 Weyl 对应规则，算符 $\exp(-\mathrm{i}\hat{J}_y\theta)$ 的经典对应为

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{J}_y\theta}&\rightarrow\mathrm{sech}^2\frac{\theta}{4}\exp\left[2(\alpha\beta^*-\beta\alpha^*)\tanh\frac{\theta}{4}\right]\\&=\mathrm{sech}^2\frac{\theta}{4}\exp\left[2\mathrm{i}(x'p-p'x)\tanh\frac{\theta}{4}\right]\end{aligned} \tag{2.114}$$

式中：$\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+\mathrm{i}p), \beta=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+\mathrm{i}p')$.

综上所述，提出算符的 Weyl 编序内的积分技术可以把量子力学的表象与变换论发展到一个新的高度，并在量子光学理论中有充分应用的前景.

# 第3章　用IWOP技术构造菲涅耳算符及其应用

在文献[51～53]中，利用IWOP技术，通过相干态表象将经典辛变换投影到量子相空间中来构造一类幺正算符，由于这些幺正算符在坐标表象的矩阵元和菲涅耳变换一一对应，故被称作菲涅耳(Fresnel)算符．下面，我们论述如何用IWOP技术发现从坐标表象到坐标-动量中介表象的幺正变换并给出菲涅耳算符．

## 3.1　从坐标表象到坐标-动量中介表象的幺正变换

已知坐标表象的完备性的纯高斯形式

$$1=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\pi}}:\mathrm{e}^{-(x-\hat{X})^2}:=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\pi}}:\exp\left[-\left(x-\frac{a+a^{\dagger}}{\sqrt{2}}\right)^2\right]:. \tag{3.1}$$

若对上式中 $a$ 和 $a^{\dagger}$ 作如下变换

$$a\rightarrow s^{*}a+ra^{\dagger},\quad a^{\dagger}\rightarrow sa+r^{*}a^{\dagger}, \tag{3.2}$$

式中：$s$ 和 $r$ 为复参数且满足 $|s|^2-|r|^2=1$，则利用IWOP技术将式(3.1)可改写为

$$\begin{aligned}1&=\int\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{\pi}}:\exp\left[-\left(q-\frac{s^{*}a+ra^{\dagger}+sa+r^{*}a^{\dagger}}{\sqrt{2}}\right)^2\right]:\\&=\int\frac{\mathrm{d}q}{|s+r|\sqrt{\pi}}:\exp\left[-\frac{1}{|s+r|^2}\left(q-\frac{s^{*}a+ra^{\dagger}+sa+r^{*}a^{\dagger}}{\sqrt{2}}\right)^2\right]:\\&\equiv\int\mathrm{d}q\,|q\rangle_{s,r\,r,s}\langle q|,\end{aligned} \tag{3.3}$$

上式第二步中的$\frac{1}{|s+r|^2}$是积分变量变换的结果，这样的变换保证上式中的指数函数展开之后可以产生真空投影算符$|0\rangle\langle 0| = :e^{-a^\dagger a}:$并注意到关系$\frac{1}{|s+r|^2} = \frac{s^*-r^*}{2(s^*+r^*)} + \frac{s-r}{2(s+r)}$，可以得到

$$|q\rangle_{s,r} = \frac{\pi^{-1/4}}{\sqrt{s^*+r^*}}\exp\left[-\frac{(s^*-r^*)q^2}{2(s^*+r^*)} + \frac{\sqrt{2}qa^\dagger}{s^*+r^*} - \frac{(s+r)a^{\dagger 2}}{2(s^*+r^*)}\right]|0\rangle. \tag{3.4}$$

根据对易关系$[a,a^\dagger]=1$，将$a$作用到$|q\rangle_{s,r}$可得到

$$[(s^*+r^*)a+(s+r)a^\dagger]\,|q\rangle_{s,r} = \sqrt{2}q\,|q\rangle_{s,r}. \tag{3.5}$$

如果取

$$s^*+r^* = D+\mathrm{i}B, \quad s-r = A+\mathrm{i}C, \tag{3.6}$$

式中：$A,B,C,D$都是参数且满足$AD-BC=1$，式(3.5)变为

$$(D\hat{X}-B\hat{P})\,|q\rangle_{s,r} = q\,|q\rangle_{s,r}, \tag{3.7}$$

这就表明$|q\rangle_{s,r}$实际上就是坐标-动量中介表象，也可以表示为

$$|q\rangle_{s,r} = \frac{\pi^{-1/4}}{\sqrt{D+\mathrm{i}B}}\exp\left[-\frac{(A-\mathrm{i}C)q^2}{2(D+\mathrm{i}B)} + \frac{\sqrt{2}qa^\dagger}{D+\mathrm{i}B} - \frac{(D-\mathrm{i}B)a^{\dagger 2}}{2(D+\mathrm{i}B)}\right]|0\rangle. \tag{3.8}$$

当$A=D=1, B=C=0$时，$|q\rangle_{s,r}$变成坐标算符本征态$|x\rangle$；而$A=D=0, -B=C=1$时，它就变成了动量算符本征态$|p\rangle$.

下面，要找一个相似变换算符$U(r,s)$，它使得下式成立

$$|q\rangle_{s,r} = U(r,s)\,|q\rangle, \tag{3.9}$$

$|q\rangle$是坐标本征态. 于是利用式(1.25)与式(3.4)以及IWOP技术积分，有

$$U(r,s) = \int \mathrm{d}q\,|q\rangle_{s,r}\langle q|$$

$$= \frac{\pi^{-1/2}}{\sqrt{s^*+r^*}}\int \mathrm{d}q : \exp\left[-\frac{(s^*-r^*)q^2}{2(s^*+r^*)} + \frac{\sqrt{2}qa^\dagger}{s^*+r^*} - \right.$$

$$\frac{(s+r)a^{\dagger 2}}{2(s^*+r^*)}-\frac{q^2}{2}+\sqrt{2}qa-\frac{a^2}{2}-a^\dagger a\Big]:$$

$$=\frac{1}{\sqrt{s^*}}:\exp\Big[-\frac{r}{2s^*}a^{\dagger 2}+\Big(\frac{1}{s^*}-1\Big)a^\dagger a+\frac{r^*}{2s^*}a^2\Big]:$$

$$=\exp\Big(-\frac{r}{2s^*}a^{\dagger 2}\Big)\exp\Big[\Big(a^\dagger a+\frac{1}{2}\Big)\ln\frac{1}{s^*}\Big]\exp\Big(\frac{r^*}{2s^*}a^2\Big),\tag{3.10}$$

这就是单模的 Fresnel 算符[54,55]. 由式(3.10)可知, $U(r,s)$ 是一个广义的单模压缩算符,将其作用到真空态可得压缩真空态:

$$U(r,s)\,|0\rangle=\frac{1}{\sqrt{s^*}}\exp\Big(-\frac{r}{2s^*}a^{\dagger 2}\Big)|0\rangle.\tag{3.11}$$

还容易证明 $U(r,s)$ 使式(3.2)的变换形式成立,即

$$U(r,s)aU^{-1}(r,s)=s^*a+ra^\dagger,$$
$$U(r,s)a^\dagger U^{-1}(r,s)=sa+r^*a^\dagger.\tag{3.12}$$

从式(3.6),就有

$$s=\frac{1}{2}[A+D-\mathrm{i}(B-C)],$$

$$r=-\frac{1}{2}[A-D+\mathrm{i}(B+C)],\tag{3.13}$$

再根据 $\hat{X}=\frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}$, $\hat{P}=\frac{a-a^\dagger}{\mathrm{i}\sqrt{2}}$, 式(3.10)与式(3.12)分别变为

$$U(r,s)=\exp\Big\{\frac{A-D+\mathrm{i}(B+C)}{2[A+D+\mathrm{i}(B-C)]}a^{\dagger 2}\Big\}\cdot$$
$$\exp\Big[\Big(a^\dagger a+\frac{1}{2}\Big)\ln\Big(\frac{2}{A+D+\mathrm{i}(B-C)}\Big)\Big]\cdot$$
$$\exp\Big\{-\frac{A-D-\mathrm{i}(B+C)}{2[A+D+\mathrm{i}(B-C)]}a^2\Big\}$$
$$=\exp\Big(\frac{\mathrm{i}C}{2A}\hat{X}^2\Big)\exp\Big[-\frac{\mathrm{i}}{2}(\hat{X}\hat{P}+\hat{P}\hat{X})\ln A\Big]\exp\Big(-\frac{\mathrm{i}B}{2A}\hat{P}^2\Big)$$
$$\equiv F(A,B,C)\tag{3.14}$$

和

$$F^{-1}\hat{X}F = A\hat{X}+B\hat{P},\quad F^{-1}\hat{P}F = C\hat{X}+D\hat{P},$$

$$F\hat{X}F^{-1} = D\hat{X}-B\hat{P},\quad F\hat{P}F^{-1} = -C\hat{X}+A\hat{P}. \tag{3.15}$$

利用坐标-动量中介表象与 Radon 变换的关系式(1.46) 以及式(2.19),有

$$\begin{aligned}|q\rangle_{s,r,s}\langle q| &= \int \mathrm{d}x\mathrm{d}p\delta[q-(Dx-Bp)]\Delta(x,p)\\ &= \int \mathrm{d}x\mathrm{d}p[q-(Dx-Bp)] \vdots \delta(x-\hat{X})\delta(p-\hat{P}) \vdots\\ &= \vdots \delta[q-(D\hat{X}-B\hat{P})] \vdots,\end{aligned} \tag{3.16}$$

根据 Weyl 编序在相似变换下具有序不变性以及利用式(3.15),可以证明

$$\begin{aligned}F^{-1}\ |q\rangle_{s,rr,s}\langle q|\ F &= \vdots \delta[q-(DF^{-1}\hat{X}F-BF^{-1}\hat{P}F)] \vdots\\ &= \vdots \delta[q-(AD-BC)\hat{X}] \vdots\\ &= \vdots \delta(q-\hat{X}) \vdots\\ &= |q\rangle\langle q|,\end{aligned} \tag{3.17}$$

这里已考虑 $AD-BC=1$ 以及式(2.23). 进一步说明式(3.10) 确保式(3.9) 成立.

## 3.2 菲涅耳算符的 Weyl 编序与分解

利用 IWWOP 技术以及式(2.76),可导出单模 Fresnel 算符的 Weyl 编序形式[56],即将式(3.10) 代入式(2.76),有

$$\begin{aligned}F &= \frac{2}{\sqrt{s^*}} \vdots \int \frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\exp\Big(-\frac{1+s^*}{s^*}\,|\beta|^2-2\beta a^\dagger+2a\beta^*-\frac{r}{2s^*}\beta^{*2}+\\ &\quad \frac{r^*}{2s^*}\beta^2+2a^\dagger a\Big)\vdots\\ &= \frac{2}{\sqrt{s^*+s+2}} \vdots \exp\left\{\frac{2[(s-s^*)a^\dagger a-ra^{\dagger 2}+r^*a^2]}{s^*+s+2}\right\}\vdots,\end{aligned} \tag{3.18}$$

这里已用了数学公式

$$\int\frac{d^2z}{\pi}\exp(\zeta|z|^2+\xi z+\eta z^*+fz^2+gz^{*2})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\zeta^2-4fg}}\exp\left(-\frac{\zeta\xi\eta+\xi^2g+\eta^2f}{\zeta^2-4fg}\right),\qquad(3.19)$$

其需满足条件 $\mathrm{Re}(\zeta+f+g)<0$，$\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta^2-4fg}{\zeta+f+g}\right)<0$，或者 $\mathrm{Re}(\zeta-f-g)<0$，$\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta^2-4fg}{\zeta-f-g}\right)<0$. 再根据式(3.13)，则式(3.18)变为

$$F(A,B,C)=\frac{2}{\sqrt{2+A+D}}\vdots\exp\left\{\frac{2\mathrm{i}[C\hat{X}^2-B\hat{P}^2+(D-A)\hat{P}\hat{X}]}{2+A+D}\right\}\vdots.\qquad(3.20)$$

根据 Weyl 对应规则，很容易得到 $F(A,B,C)$ 的经典对应

$$h(x,p)=\frac{2}{\sqrt{2+A+D}}\exp\left\{\frac{2\mathrm{i}[Cx^2-Bp^2+(D-A)xp]}{2+A+D}\right\}.\qquad(3.21)$$

在文献[55]中，已证明了菲涅耳算符具有群乘法规则，即两个菲涅耳算符的乘积仍然是一个菲涅耳算符：

$$F(A,B,C)F(A',B',C')=F(A'',B'',C''),\qquad(3.22)$$

式中：

$$\begin{pmatrix}A'' & B''\\ C'' & D''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A' & B'\\ C' & D'\end{pmatrix}.\qquad(3.23)$$

从式(3.20)与式(3.22)，有

$$\frac{2}{\sqrt{2+A+D}}\vdots\exp\left\{\frac{2\mathrm{i}[C\hat{X}^2-B\hat{P}^2+(D-A)\hat{P}\hat{X}]}{2+A+D}\right\}\vdots\cdot$$

$$\frac{2}{\sqrt{2+A'+D'}}\vdots\exp\left\{\frac{2\mathrm{i}[C'\hat{X}^2-B'\hat{P}^2+(D'-A')\hat{P}\hat{X}]}{2+A'+D'}\right\}\vdots$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2+A''+D''}} \vdots \exp\left[\frac{2\mathrm{i}(C''\hat{X}^2 - B''\hat{P}^2 + (D''-A'')\hat{P}\hat{X})}{2+A''+D''}\right]\vdots. \tag{3.24}$$

从上式显示两个Weyl编序好的菲涅耳算符相乘能被另一Weyl编序好的菲涅耳算符来表示，其矩阵$[A'',B'',C'',D'']$与原有矩阵$[A,B,C,D]$与矩阵$[A',B',C',D']$满足式(3.23).

作为菲涅耳算符的Weyl编序应用，可考虑坐标表象中的矩阵元，即

$$\langle x'|\ F(A,B,C)\ |x\rangle$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2+A+D}}\langle x'|\ \vdots \exp\left[\frac{2\mathrm{i}(C\hat{X}^2 - B\hat{P}^2 + (D-A)\hat{P}\hat{X})}{2+A+D}\right]\vdots\ |x\rangle. \tag{3.25}$$

注意 Weyl 变换规则

$$\langle x'|\ H(\hat{P},\hat{X})\ |x\rangle = \int \frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x'-x)}h\left(p,\frac{x+x'}{2}\right), \tag{3.26}$$

这里 $h(p,x)$ 是 $H(\hat{P},\hat{X})$ 的 Weyl 经典对应，把式(3.21) 代入式(3.26)，并积分得到

$$\langle x'|\ F(A,B,C)\ |x\rangle$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2+A+D}}\int \frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x'-x)}\cdot$$

$$\exp\left[\frac{-2\mathrm{i}Bp^2 + \mathrm{i}(D-A)(x+x')p + 2\mathrm{i}C\left(\frac{x+x'}{2}\right)^2}{2+A+D}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mathrm{i}2\pi B}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2B}(Ax^2 + Dx'^2 - 2xx')\right], \tag{3.27}$$

这正是在经典光学中的广义 Fresnel 变换积分核[57]，这就是为什么我们称 $F$ 为 Fresnel 算符.

另一方面，对照式(3.14) 并利用矩阵分解为[58]

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ C/A & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & B/A \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.28}$$

有

$$F(A,B,C) = F(1,0,C/A)F(A,0,0)F(1,B/A,0), \tag{3.29}$$

式中：

$$F(1,0,C/A) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}C}{2A}\hat{X}^2\right) = \vdots \exp\left(\frac{\mathrm{i}C}{2A}\hat{X}^2\right) \vdots,$$

$$F(1,B/A,0) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}B}{2A}\hat{P}^2\right) = \vdots \exp\left(-\frac{\mathrm{i}B}{2A}\hat{P}^2\right) \vdots,$$

$$F(A,0,0) = \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}(\hat{X}\hat{P} + \hat{P}\hat{X})\ln A\right]. \tag{3.30}$$

注意对应关系

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \tag{3.31}$$

然后将式(3.31)代入式(3.20)，有

$$\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}(\hat{X}\hat{P} + \hat{P}\hat{X})\ln A\right] = \frac{2\sqrt{A}}{|A+1|} \vdots \exp\left(-2\mathrm{i}\frac{A-1}{A+1}\hat{X}\hat{P}\right) \vdots, \tag{3.32}$$

这就导出一个恒等式

$$\exp[-\mathrm{i}\lambda(\hat{X}\hat{P} + \hat{P}\hat{X})] = \operatorname{sech}\lambda \vdots \exp(-2\mathrm{i}\hat{X}\hat{P}\tanh\lambda) \vdots. \tag{3.33}$$

再考虑式(3.20)和式(3.29)，可得到

$$\frac{2\sqrt{A}}{|A+1|} \vdots \exp\left(\frac{\mathrm{i}C}{2A}\hat{X}^2\right) \vdots \vdots \exp\left(-2\mathrm{i}\frac{A-1}{A+1}\hat{X}\hat{P}\right) \vdots \vdots \exp\left(-\frac{\mathrm{i}B}{2A}\hat{P}^2\right) \vdots$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2+A+D}} \vdots \exp\left[\frac{2\mathrm{i}(C\hat{X}^2 - B\hat{P}^2 + (D-A)\hat{P}\hat{X})}{2+A+D}\right] \vdots. \tag{3.34}$$

当 $A = 0$ 时，式(3.29)的分解就变成无效，从而考虑

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

有

$$F^{-1}(A,B,C)$$

$$= \exp\left(-\frac{\mathrm{i}C}{2D}\hat{X}^2\right)\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}(\hat{X}\hat{P}+\hat{P}\hat{X})\ln D\right]\exp\left(\frac{\mathrm{i}B}{2D}\hat{P}^2\right), \tag{3.36}$$

则

$$F(A,B,C) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}B}{2D}\hat{P}^2\right)\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}(\hat{X}\hat{P}+\hat{P}\hat{X})\ln D\right]\exp\left(\frac{\mathrm{i}C}{2D}\hat{X}^2\right),\quad D\neq 0, \tag{3.37}$$

利用式(3.33),同样有

$$\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}(\hat{X}\hat{P}+\hat{P}\hat{X})\ln D\right]=\frac{2\sqrt{D}}{|1+D|}\,\vdots\exp\left(2\mathrm{i}\,\frac{D-1}{D+1}\hat{X}\hat{P}\right)\vdots. \tag{3.38}$$

因此,我们能导出另一等式

$$\frac{2\sqrt{D}}{|1+D|}\,\vdots\exp\left(-\frac{\mathrm{i}B}{2D}\hat{P}^2\right)\vdots\,\vdots\exp\left(2\mathrm{i}\,\frac{D-1}{D+1}\hat{X}\hat{P}\right)\vdots\,\vdots\exp\left(\frac{\mathrm{i}C}{2D}\hat{X}^2\right)\vdots$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2+A+D}}\,\vdots\exp\left[\frac{2\mathrm{i}(C\hat{X}^2-B\hat{P}^2)+(D-A)\hat{P}\hat{X}}{2+A+D}\right]\vdots, \tag{3.39}$$

最后,注意到另二种分解途径:

$$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ D/B & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B & 0\\ 0 & 1/B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ A/B & 1\end{bmatrix}, \tag{3.40}$$

以及

$$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & A/C\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1/C & 0\\ 0 & -C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & D/C\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \tag{3.41}$$

就得到另一种 $F(A,B,C)$ 的 Weyl 编序分解形式,即

$$F(A,B,C) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}D}{2B}\hat{X}^2\right)\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}(\hat{X}\hat{P}+\hat{P}\hat{X})\ln B\right]$$

$$\exp\left[-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}(\hat{X}^2+\hat{P}^2)\right]\exp\left(\frac{\mathrm{i}A}{2B}\hat{X}^2\right),\quad B\neq 0, \tag{3.42}$$

和

$$F(A,B,C) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}A}{2C}\hat{P}^2\right)\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}(\hat{X}\hat{P}+\hat{P}\hat{X})\ln\left(-\frac{1}{C}\right)\right]$$

$$\exp\left[-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}(\hat{X}^2+\hat{P}^2)\right]\exp\left(-\frac{\mathrm{i}D}{2C}\hat{P}^2\right),\quad C\neq 0. \tag{3.43}$$

根据式(3.20),有

$$\exp\left[-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}(\hat{X}^2+\hat{P}^2)\right]=\sqrt{2}\,\vdots\exp[-\mathrm{i}(\hat{X}^2+\hat{P}^2)]\vdots,$$

$$\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}(\hat{X}\hat{P}+\hat{P}\hat{X})\ln B\right]=\frac{2\sqrt{B}}{|B+1|}\vdots\exp\left(-2\mathrm{i}\,\frac{B-1}{B+1}\hat{X}\hat{P}\right)\vdots,$$

$$\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}(\hat{X}\hat{P}+\hat{P}\hat{X})\ln\left(-\frac{1}{C}\right)\right]=\frac{2\sqrt{-C}}{|C-1|}\vdots\exp\left(-2\mathrm{i}\,\frac{1+C}{1-C}\hat{X}\hat{P}\right)\vdots, \tag{3.44}$$

则

$$F(A,B,C) = \frac{2\sqrt{2B}}{|B+1|}\exp\left(\frac{\mathrm{i}D}{2B}\hat{X}^2\right)\vdots\exp\left(-2\mathrm{i}\,\frac{B-1}{B+1}\hat{X}\hat{P}\right)\vdots\,\cdot$$

$$\vdots\exp[-\mathrm{i}(\hat{X}^2+\hat{P}^2)]\vdots\exp\left(\frac{\mathrm{i}A}{2B}\hat{X}^2\right),\quad B\neq 0 \tag{3.45}$$

与

$$F(A,B,C) = \frac{2\sqrt{-2C}}{|C-1|}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}A}{2C}\hat{P}^2\right)\vdots\exp\left(-2\mathrm{i}\,\frac{1+C}{1-C}\hat{X}\hat{P}\right)\vdots$$

$$\vdots\exp[-\mathrm{i}(\hat{X}^2+\hat{P}^2)]\vdots\exp\left(-\frac{\mathrm{i}D}{2C}\hat{P}^2\right),\quad C\neq 0. \tag{3.46}$$

这些算符恒等式可以对应矩阵光学中的成像规则.

## 3.3 菲涅耳变换求解含时谐振子的演化

可以利用菲涅耳算符来处理含时的谐振子的演化问题[59]. 设含时谐振子的哈密顿量为

$$\hat{H} = f(t)\,\frac{\hat{P}^2}{2m} + g(t)\,\frac{1}{2}m\omega_0^2\hat{X}^2 + h(t)(\hat{P}\hat{X}), \quad (3.47)$$

相应的薛定谔方程为

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial\,|\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}\,|\psi(t)\rangle \quad (\hbar = 1), \quad (3.48)$$

通过含时菲涅耳变换将式(3.47)中含时哈密顿量 $\hat{H}$ 转变为标准谐振子的形式，其中参量 $A(t), B(t), C(t), D(t)$ 可通过一些耦合的微分方程来决定，相应的菲涅耳变换使得

$$|\phi\rangle = F\,|\psi(t)\rangle, \quad (3.49)$$

则

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\,\frac{\partial\,|\phi\rangle}{\partial t} &= \mathrm{i}\,\frac{\partial(F\,|\psi(t)\rangle)}{\partial t} \\ &= \mathrm{i}\,\frac{\partial F}{\partial t}\,|\psi(t)\rangle + F\hat{H}\,|\psi(t)\rangle \equiv \hat{\mathscr{H}}|\phi\rangle. \quad (3.50)\end{aligned}$$

其中：$\hat{\mathscr{H}} = \mathrm{i}\,\frac{\partial F}{\partial t}F^{-1} + FHF^{-1}$. 由于 $FF^{-1} = 1$ 以及 $\frac{\partial F}{\partial t}F^{-1} + F\,\frac{\partial F^{-1}}{\partial t} = 0$，有

$$\hat{\mathscr{H}} = F\hat{H}F^{-1} - \mathrm{i}F\,\frac{\partial F^{-1}}{\partial t}. \quad (3.51)$$

为了求出 $\hat{\mathscr{H}}$，必须先计算出$\frac{\partial F^{-1}}{\partial t}$，因此利用 Baker-Hausdorff 公式

$$\mathrm{e}^{\hat{\mathscr{A}}}\hat{\mathscr{B}}\mathrm{e}^{-\hat{\mathscr{A}}} = \hat{\mathscr{B}} + [\hat{\mathscr{A}},\hat{\mathscr{B}}] + \frac{1}{2!}[\hat{\mathscr{A}},[\hat{\mathscr{A}},\hat{\mathscr{B}}]] + \cdots \quad (3.52)$$

与式(3.14)以及变换关系式(3.15)，得

$$\frac{\partial F^{-1}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\exp\left(\frac{\mathrm{i}B}{2A}\hat{P}^2\right)\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}(\hat{X}\hat{P}+\hat{P}\hat{X})\ln A\right]\exp\left(-\frac{\mathrm{i}C}{2A}\hat{X}^2\right)\right]$$

$$=F^{-1}\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial t}-\frac{B}{A^2}\frac{\partial A}{\partial t}\right)(A\hat{P}-C\hat{X})^2+$$

$$F^{-1}\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial A}{A\partial t}\left(\hat{X}\hat{P}+\hat{P}\hat{X}-\frac{2C}{A}\hat{X}^2\right)+$$

$$F^{-1}\frac{-\mathrm{i}\hat{X}^2}{2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial C}{\partial t}-\frac{C}{A^2}\frac{\partial A}{\partial t}\right)$$

$$=\frac{\mathrm{i}}{2}F^{-1}\left[\left(A\frac{\partial B}{\partial t}-B\frac{\partial A}{\partial t}\right)\hat{P}^2+\left(C\frac{\partial D}{\partial t}-D\frac{\partial C}{\partial t}\right)\hat{X}^2+\right.$$

$$\left.\left(D\frac{\partial A}{\partial t}-C\frac{\partial B}{\partial t}\right)(\hat{X}\hat{P}+\hat{P}\hat{X})\right], \tag{3.53}$$

式中已考虑了 $AD-BC=1$ 以及 $A\frac{\partial D}{\partial t}+D\frac{\partial C}{\partial t}-B\frac{\partial C}{\partial t}-C\frac{\partial B}{\partial t}=0$. 将式(3.15),式(3.47) 与式(3.53) 代入式(3.51),得到

$$\hat{\mathscr{H}}=\frac{f(t)}{2m}F\hat{P}^2F^{-1}+\frac{m\omega_0^2g(t)}{2}F\hat{X}^2F^{-1}-\mathrm{i}F\frac{\partial F^{-1}(t)}{\partial t}$$

$$=\left[\frac{A^2f(t)}{2m}+\frac{m\omega_0^2g(t)}{2}B^2+\frac{A\frac{\partial B}{\partial t}-B\frac{\partial A}{\partial t}-2h(t)AB}{2}\right]\hat{P}^2+$$

$$\left[\frac{f(t)C^2}{2m}+\frac{m\omega_0^2g(t)}{2}D^2+\frac{C\frac{\partial D}{\partial t}-D\frac{\partial C}{\partial t}-2h(t)CD}{2}\right]\hat{X}^2-$$

$$\left[\frac{ACf(t)}{2m}+\frac{m\omega_0^2g(t)DB}{2}-\frac{D\frac{\partial A}{\partial t}-C\frac{\partial B}{\partial t}-h(t)(AD+BC)}{2}\right]\cdot$$

$$(\hat{X}\hat{P}+\hat{P}\hat{X}). \tag{3.54}$$

我们目标是希望 $\hat{\mathscr{H}}$ 是一个不含时谐振子哈密顿量,即

$$\hat{\mathscr{H}}=\frac{P^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{X}, \tag{3.55}$$

其中:$\omega$ 为待定,于是比较式(3.54) 与式(3.55),就得到以下耦合微分方程组:

$$\frac{A^2 f(t)}{2m}+\frac{B^2 m\omega_0^2 g(t)}{2}+\frac{1}{2}\left(A\frac{\partial B}{\partial t}-B\frac{\partial A}{\partial t}\right)-2h(t)AB=\frac{1}{2m},\tag{3.56}$$

$$\frac{C^2 f(t)}{2m}+\frac{D^2 m\omega_0^2 g(t)}{2}+\frac{1}{2}\left(C\frac{\partial D}{\partial t}-D\frac{\partial C}{\partial t}\right)-2h(t)CD=\frac{m\omega^2}{2},\tag{3.57}$$

$$\frac{ACf(t)}{2m}+\frac{DBm\omega_0^2 g(t)}{2}-\frac{1}{2}\left(D\frac{\partial A}{\partial t}-C\frac{\partial B}{\partial t}\right)-h(t)(AD+BC)=0.\tag{3.58}$$

虽然耦合偏微分方程组式(3.36)～式(3.58)看起来很复杂,但有些解可以通过直接观察来决定. 对于式(3.56),易得到 $A=\frac{1}{\sqrt{f(t)}}$,$B=0$. 又根据 $AD-BC=1$,进而得到 $D=\sqrt{f(t)}$. 再从式(3.58)中可解得

$$C=-\frac{m}{2\sqrt{f^3(t)}}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{2m}{\sqrt{f(t)}}h(t),\tag{3.59}$$

将式(3.59)代入式(3.57),进一步解出频率 $\omega$. 这样从式(3.47)中的含时哈密顿量 $\hat{H}$ 变成标准谐振子形式,如式(3.55).

作为一个典型例子,考虑文献[60,61]中CK(Caidirola-Kanai)谐振子模型的哈密顿量

$$\hat{H}=\mathrm{e}^{-2\gamma t}\frac{\hat{P}^2}{2m}+\mathrm{e}^{2\gamma t}\frac{1}{2}m\omega_0^2\hat{X}^2,\tag{3.60}$$

即在式(3.47)中取 $f(t)=\mathrm{e}^{-2\gamma t}$,$g(t)=\mathrm{e}^{2\gamma t}$ 和 $h(t)=0$,再代入到式(3.59),就有

$$A=\mathrm{e}^{\gamma t},\quad B=0,\quad C=m\gamma\mathrm{e}^{\gamma t},\quad D=\mathrm{e}^{-\gamma t}.\tag{3.61}$$

再将式(3.61)代入式(3.57),得到相应的频率 $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$. 根据式(3.14)与式(3.61),对于CK谐振子模型的哈密顿量的相应菲涅耳算符是

$$F=\exp\left(\frac{\mathrm{i}m\gamma}{2}\hat{X}^2\right)\exp\left[-\frac{\mathrm{i}\gamma t}{2}(\hat{X}\hat{P}+\hat{P}\hat{X})\right].\tag{3.62}$$

从式(3.49)知，相应的含时波函数为 $|\psi(t)\rangle = F^{-1}|\phi\rangle$. 则由式(3.62)得到此模型的薛定谔方程的解：

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left[\frac{\mathrm{i}\gamma t}{2}(\hat{X}\hat{P}+\hat{P}\hat{X})\right]\exp\left(\frac{-\mathrm{i}m\gamma}{2}\hat{X}^2\right)|\phi\rangle. \tag{3.63}$$

$|\phi\rangle$ 是 $\frac{\hat{P}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{X}^2$ 的本征态，即 $|n\rangle$，$|n\rangle$ 为粒子数态，在坐标表象 $\langle x|$ 中，$\langle x|\hat{X}=x\langle x|$，利用

$$\langle x|\exp\left[\frac{\mathrm{i}\gamma t}{2}(\hat{X}\hat{P}+\hat{P}\hat{X})\right]=\mathrm{e}^{\gamma t/2}\langle \mathrm{e}^{\gamma t}x|, \tag{3.64}$$

得到 $|\psi(t)\rangle$ 在坐标表象中的形式

$$\begin{aligned}\langle x|\psi(t)\rangle &= \langle x|\exp\left[\frac{\mathrm{i}\gamma t}{2}(\hat{X}\hat{P}+\hat{P}\hat{X})\right]\exp\left(\frac{-\mathrm{i}m\gamma}{2}\hat{X}^2\right)|\phi\rangle \\ &= \mathrm{e}^{-\gamma t/2}\exp\left(\frac{-\mathrm{i}m\gamma}{2}\mathrm{e}^{2\gamma t}x^2\right)\langle \mathrm{e}^{\gamma t}x|n\rangle.\end{aligned} \tag{3.65}$$

由第 1 章中式(1.56)知

$$\langle \mathrm{e}^{\gamma t}x|n\rangle = \left(\frac{1}{2^n n!}\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{-m\omega}{2\hbar}\mathrm{e}^{2\gamma t}x^2\right)\mathrm{H}_n\left(\mathrm{e}^{\gamma t}x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right), \tag{3.66}$$

这里将 $\hbar$ 补上，$\mathrm{H}_n(x)$ 为 Hermite 多项式. 很显然，利用菲涅耳算符变换，对于 CK 模型的玻函数 $\langle x|\psi(t)\rangle$ 被求出，其就是一个压缩粒子数态.

下面，我们考虑另一个哈密顿量

$$\hat{H}' = \mathrm{e}^{-2\gamma t}\frac{\hat{P}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega_0^2\mathrm{e}^{2\gamma t}\hat{X}^2+\gamma(\hat{P}\hat{X}+\hat{X}\hat{P}) \tag{3.67}$$

其中 $\gamma$ 为耦合系数，相应的 $f(t)=\mathrm{e}^{-2\gamma t}$，$g(t)=\mathrm{e}^{2\gamma t}$，$h(t)=\gamma$. 根据式(3.59)，得

$$A'=\mathrm{e}^{\gamma t},\quad B'=0,\quad C'=3m\gamma\mathrm{e}^{\gamma t},\quad D'=\mathrm{e}^{-\gamma t}. \tag{3.68}$$

于是，相应的菲涅耳算符为

$$F' = \exp\left(\frac{\mathrm{i}3m\gamma}{2}\hat{X}^2\right)\exp\left[-\frac{\mathrm{i}\gamma t}{2}(\hat{X}\hat{P}+\hat{P}\hat{X})\right], \quad (3.69)$$

它使哈密顿量 $\hat{H}'$ 变成标准谐振子形式，对应的频率为 $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - 3\gamma^2}$.

最后，根据Weyl编序在相似变换下具有序不变性以及利用式(3.15)和式(3.62)，可计算出CK模型态矢量的Wigner函数，即

$$\begin{aligned} W_n(x,p) &= \mathrm{tr}[\,|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|\,\Delta(x,p)] \\ &= \langle n|\,F \vdots\, \delta(x-\hat{X})\delta(p-\hat{P}) \,\vdots\, F^{-1}\,|n\rangle \\ &= \langle n|\,\vdots\, \delta(x-\mathrm{e}^{-\gamma t}\hat{X})\delta[p-\mathrm{e}^{\gamma t}(\hat{P}-m\gamma\hat{X})] \,\vdots\, |n\rangle \\ &= \langle n|\,\Delta(x',p')\,|n\rangle, \end{aligned} \quad (3.70)$$

其中：

$$x' \equiv \mathrm{e}^{\gamma t}x, \quad p' \equiv m\gamma\mathrm{e}^{\gamma t}x + \mathrm{e}^{-\gamma t}p. \quad (3.71)$$

借助粒子数 $|n\rangle$ 的 Wigner 函数的结果[36]

$$W_{|n\rangle}(x,p) = \frac{(-1)^n}{\pi}\mathrm{e}^{-2|\alpha|^2}\mathrm{L}_n(4\,|\,\alpha\,|^2), \quad (3.72)$$

其中：$\alpha \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x+\mathrm{i}p)$，$\mathrm{L}_n(x)$ 为 Leguerre 多项式. 可得，CK 模型态矢量的 Wigner 函数为

$$W_n(x,p) = \frac{(-1)^n}{\pi}\mathrm{e}^{-2|\alpha'|^2}\mathrm{L}_n(4\,|\,\alpha'\,|^2), \quad (3.73)$$

式中：

$$\alpha' \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x' + \mathrm{i}\,\frac{p'}{\sqrt{m\hbar\omega}}\right). \quad (3.74)$$

特别地，当取 $n=0$ 时，式(3.73)就变为压缩真空态的 Wigner 函数

$$W_{n=0}(x,p) = \frac{1}{\pi}\exp\left[-\frac{(p+m\gamma\mathrm{e}^{2\gamma t}x)^2}{m\hbar\omega\mathrm{e}^{2\gamma t}} - \frac{m\omega\mathrm{e}^{2\gamma t}}{\hbar}x^2\right]. \quad (3.75)$$

当取 $n=1$ 时，其相应 Wigner 函数为

$$W_{n=1}(x,p)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{2(p+m\gamma e^{2\gamma t}x)^2}{m\hbar\omega e^{2\gamma t}}+\frac{2m\omega e^{2\gamma t}}{\hbar}x^2-1\right]\cdot$$
$$\exp\left[-\frac{(p+m\gamma e^{2\gamma t}x)^2}{m\hbar\omega e^{2\gamma t}}-\frac{m\omega e^{2\gamma t}}{\hbar}x^2\right].\tag{3.76}$$

以上例子充分说明了引入菲涅耳算符的好处.

# 第4章　基于广义 Randon 变换构造多模纠缠态表象

在第2章中式(2.1)和式(2.2)表明 Wigner 函数的单侧积分分别在相空间 $x$ 方向(坐标空间)和 $p$ 方向(动量空间)找到粒子的几率,那么反过来可否从单侧积分的结果还原出 Wigner 函数呢?一个猜测是,如果 Wigner 函数在所有方向的单侧积分都知道的话,也许就能如愿.近年来,基于 Radon 变换重构 Wigner 函数的 Tomography 技术倍受关注[62,63].本章中用 IWOP 技术直接阐述和发展这一理论,发现 Wigner 算符的 Radon 变换对应于一个纯态密度算符,即导致了一个新表象的出现.例如第1章里所介绍的坐标-动量中介表象 $|q\rangle_{\mu,\nu}$,它由 Wigner 算符的正规乘积形式

$$\Delta(x,p)=\frac{1}{\pi}:\exp[-(x-\hat{X})^2-(p-\hat{P})^2]: \tag{4.1}$$

和 IWOP 技术实现积分

$$\int dx dp\delta(q-\mu x-\nu p)\Delta(x,p)=|q\rangle_{\mu,\nu\nu,\mu}\langle q| \tag{4.2}$$

而得.根据上述的思想,现介绍获得多模纠缠态表象的一种新方法,即 Wigner 算符的广义 Randon 变换能够导出连续变量的多模纠缠态的密度算符.

## 4.1　用 Wigner 算符的广义 Randon 变换求纯态

首先提出用 Wigner 算符的广义 Randon 变换求纯态的定理[64,65].设 $|r\rangle$ 是一个厄米算符 $\hat{R}=\hat{R}(\hat{X},\hat{P})$ 的本征态,即

$\hat{R}\,|r\rangle = r\,|r\rangle$，且$\langle r|r'\rangle = \delta(r-r')$，并设$\hat{R}$的Weyl编序是其本身，即$\hat{R} = \vdots\,\hat{R}\,\vdots$，($\vdots\ \vdots$表示Weyl编序形式)，则

$$|r\rangle\langle r| = \int \mathrm{d}x\mathrm{d}p\delta[r-R(x,p)]\Delta(x,p), \tag{4.3}$$

其中：$R(x,p)$是$\hat{R}$的Weyl对应的经典函数，$\Delta(x,p)$为Wigner算符.

证明：根据$\delta$函数的性质以及$\hat{R}\,|r\rangle = r\,|r\rangle$，有

$$\begin{aligned}|r\rangle &= \int \mathrm{d}r'\delta(r-r')\,|r'\rangle \\ &= \int \mathrm{d}r'\delta(r-\hat{R})\,|r'\rangle \\ &= \int \mathrm{d}r'\,\vdots\,\delta(r-\hat{R})\,\vdots\,|r'\rangle \\ &= \int \mathrm{d}r'\int \mathrm{d}p\mathrm{d}x\delta[r-R(x,p)]\,\vdots\,\delta(x-\hat{X})\delta(p-\hat{P})\,\vdots\,|r'\rangle,\end{aligned} \tag{4.4}$$

这里已经考虑了$\vdots\,\hat{R}\,\vdots = \hat{R}$这个已知条件. 又根据Wigner算符的Weyl编序形式

$$\Delta(x,p) = \vdots\,\delta(x-\hat{X})\delta(p-\hat{P})\,\vdots = \vdots\,\delta(p-\hat{P})\delta(x-\hat{X})\,\vdots, \tag{4.5}$$

则有

$$|r\rangle = \int \mathrm{d}r'\int \mathrm{d}p\mathrm{d}x\delta[r-R(x,p)]\Delta(x,p)\,|r'\rangle. \tag{4.6}$$

把上式与

$$|r\rangle = \int \mathrm{d}r'\,|r\rangle\langle r|r'\rangle \tag{4.7}$$

相比较就得到了式(4.3). 进一步，把Wigner算符的正规乘积形式式(4.1)代入式(4.3)积分并利用$:\exp(-a^{\dagger}a): = |0\rangle\langle 0|$就可导出$|r\rangle\langle r|$的具体表达式.

另一方面，由 Weyl 对应和式(4.5)可知

$$\int \mathrm{d}p\mathrm{d}x\delta[r-R(x,p)]\Delta(x,p) = \vdots\, \delta[r-\hat{R}(\hat{X},\hat{P})]\,\vdots, \tag{4.8}$$

因而方程(4.3)就为

$$|r\rangle\langle r| = \vdots\, \delta[r-\hat{R}(\hat{X},\hat{P})]\,\vdots, \tag{4.9}$$

从上式也很容易证明 $|r\rangle$ 的完备性，即

$$\int \mathrm{d}r\, |r\rangle\langle r| = \int \mathrm{d}r\, \vdots\, \delta[r-\hat{R}(\hat{X},\hat{P})]\,\vdots = 1. \tag{4.10}$$

推论：对于多模情况，设 $|\vec{r}\rangle \equiv |r_1,r_2,\cdots,r_n\rangle$ 是 $n$ 个相互对易厄米算符 $\hat{R}_i(\hat{X}_1,\hat{X}_2,\cdots,\hat{X}_n,\hat{P}_1,\hat{P}_2,\cdots,\hat{P}_n)$ 的共同本征态，$\hat{R}_i\,|\vec{r}\rangle = r_i\,|\vec{r}\rangle$，$\langle\vec{r}\,|\vec{r}'\rangle = \delta(\vec{r}-\vec{r}')$，$i=1,2,\cdots,n$，同时每个算符 $\hat{R}_i$ 的 Weyl 编序形式是其本身，则

$$\begin{aligned}&|r_1,r_2,\cdots,r_n\rangle\langle r_1,r_2,\cdots,r_n| \\ &= \int \prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}p_i\mathrm{d}x_i\delta[r_i-R_i(x_i,p_i)]\Delta_i(x_i,p_i),\end{aligned} \tag{4.11}$$

式中：

$$\prod_{i=1}^{n}\Delta_i(x_i,p_i) = \frac{1}{\pi^n} : \exp\Big[-\sum_{j=1}^{n}[(x_j-\hat{X}_j)^2+(p_j-\hat{P}_j)^2]\Big] : \equiv \Delta_n \tag{4.12}$$

是 $n$ 模 Wigner 算符. 另外，利用 Wigner 算符的完备性，即

$$\int \prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}p_i\mathrm{d}x_i\Delta_i(x_i,p_i), = 1, \tag{4.13}$$

也很容易证明 $|r_1,r_2,\cdots,r_n\rangle$ 是一个完备系列，

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{d}r_1\mathrm{d}r_2\cdots\mathrm{d}r_n\, |r_1,r_2,\cdots,r_n\rangle\langle r_1,r_2,\cdots,r_n| \\ &= \int \mathrm{d}r_1\mathrm{d}r_2\cdots\mathrm{d}r_n \int \prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}p_i\mathrm{d}x_i\delta[r_i-R_i(x_i,p_i)]\Delta_i(x_i,p_i) \\ &= \int \prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}p_i\mathrm{d}x_i\Delta_i(x_i,p_i) = 1.\end{aligned} \tag{4.14}$$

由方程(4.3)与式(4.11)可以很方便地找到许多新的量子力学表象,也就是一些相互对易算符的共同本征态——连续变量的纠缠态表象,这丰富了Dirac表象和变换理论.下面举一些例子来说明这一点.

## 4.2 量子力学的两体纠缠态表象

### 4.2.1 两粒子相对坐标与总动量的共同本征态 $|\eta\rangle$

量子纠缠的思想最初由Einstein等三人在1935年提出,他们基于两粒子相对坐标 $\hat{X}_1-\hat{X}_2$ 与总动量 $\hat{P}_1+\hat{P}_2$ 是相互对易($[\hat{X}_1-\hat{X}_2,\hat{P}_1+\hat{P}_2]=0$)这一事实出发来批评现行量子力学的描述是不完备的[66].根据Einstein等的思想,文献[67]中范洪义等给出了 $\hat{X}_1-\hat{X}_2$ 与 $\hat{P}_1+\hat{P}_2$ 的共同本征态 $|\eta\rangle$ 的具体形式,被称为两体的连续变量纠缠态表象.这个表象在量子力学、量子光学以及凝聚态物理等方面有广泛的应用,值得所有学量子力学的人了解.

下面指出,根据式(4.11)能够很简单地导出上述的纠缠态表象.记 $\hat{X}_1-\hat{X}_2$ 与 $\hat{P}_1+\hat{P}_2$ 的共同本征态为 $|\alpha_1,\alpha_2\rangle$,它满足本征方程

$$(\hat{X}_1-\hat{X}_2)|\alpha_1,\alpha_2\rangle=\alpha_1|\alpha_1,\alpha_2\rangle,$$
$$(\hat{P}_1+\hat{P}_2)|\alpha_1,\alpha_2\rangle=\alpha_2|\alpha_1,\alpha_2\rangle. \tag{4.15}$$

由Weyl编序的定义

$$\vdots\,\hat{X}^m\hat{P}^n\,\vdots=\left(\frac{1}{2}\right)^m\sum_{l=0}^{m}\frac{m!}{l!(m-l)!}\hat{X}^{m-l}\hat{P}^n\hat{X}^l, \tag{4.16}$$

例如:

$$\vdots\,\hat{X}\hat{P}\,\vdots=\frac{1}{2}(\hat{X}\hat{P}+\hat{P}\hat{X}), \tag{4.17}$$

可以得到

$$
\begin{aligned}
&(\hat{X}_1-\hat{X}_2)(\hat{P}_1+\hat{P}_2)\\
&=\frac{\hat{X}_1\hat{P}_1+\hat{P}_1\hat{X}_1}{2}-\frac{\hat{X}_2\hat{P}_2+\hat{P}_2\hat{X}_2}{2}-\hat{X}_2\hat{P}_1+\hat{X}_1\hat{P}_2\\
&=\vdots(\hat{X}_1-\hat{X}_2)(\hat{P}_1+\hat{P}_2)\vdots,
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

$$
(\hat{P}_1+\hat{P}_2)(\hat{X}_1-\hat{X}_2)=\vdots(\hat{P}_1+\hat{P}_2)(\hat{X}_1-\hat{X}_2)\vdots. \tag{4.19}
$$

可以看出$(\hat{X}_1-\hat{X}_2)(\hat{P}_1+\hat{P}_2)$或$(\hat{P}_1+\hat{P}_2)(\hat{X}_1-\hat{X}_2)$本身就是一个 Weyl 编序形式，相应的经典对应为$(x_1-x_2)(p_1+p_2)$或$(p_1+p_2)(x_1-x_2)$. 再利用式(4.11) 与式(4.12)，就得到如下的方程：

$$
\begin{aligned}
&|\alpha_1,\alpha_2\rangle\langle\alpha_1,\alpha_2|\\
&=\int \mathrm{d}p_1\mathrm{d}x_1\mathrm{d}p_2\mathrm{d}x_2\,\delta[\alpha_1-(x_1-x_2)]\delta[\alpha_2-(p_1+p_2)]\cdot\\
&\quad\frac{1}{\pi^2}:\mathrm{e}^{-(x_1-\hat{X}_1)^2-(p_1-\hat{P}_1)^2-(x_2-\hat{X}_2)^2-(p_2-\hat{P}_2)^2}:.
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

用 δ 函数的性质与 IWOP 技术及

$$
\int\exp(-ax^2+bx)\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)\quad a>0, \tag{4.21}
$$

对式(4.20) 直接积分而得

$$
|\alpha_1,\alpha_2\rangle\langle\alpha_1,\alpha_2|=\frac{1}{2\pi}:\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[\alpha_1-(\hat{X}_1-\hat{X}_2)]^2-\frac{1}{2}[\alpha_2-(\hat{P}_1+\hat{P}_2)]^2}:, \tag{4.22}
$$

考虑到 $\hat{X}_j=\frac{1}{\sqrt{2}}(a_j+a_j^\dagger)$，$\hat{P}_j=\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{2}}(a_j-a_j^\dagger)$和 $:\exp(-a_1^\dagger a_1-a_2^\dagger a_2):=|00\rangle\langle 00|$，可以将式(4.22) 的右边写成 $F(a_i^\dagger)\,|00\rangle\langle 00|\,F(a_i)$ 的形式，这样就得到

$$
\begin{aligned}
&|\alpha_1,\alpha_2\rangle\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{4}+\frac{\alpha_1+\mathrm{i}\alpha_2}{\sqrt{2}}a_1^\dagger-\frac{\alpha_1-\mathrm{i}\alpha_2}{\sqrt{2}}a_2^\dagger+a_1^\dagger a_2^\dagger\right)|00\rangle.
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

再令 $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1 + \mathrm{i}\alpha_2) = \eta_1 + \mathrm{i}\eta_2$，上式就变为

$$
\begin{aligned}
|\eta\rangle &\equiv \sqrt{2\pi}\ |\alpha_1, \alpha_2\rangle \\
&= \exp\left(-\frac{|\eta|^2}{2} + \eta a_1^\dagger - \eta^* a_2^\dagger + a_1^\dagger a_2^\dagger\right)|00\rangle,
\end{aligned} \tag{4.24}
$$

这就是纠缠态表象，与文献[67] 中结果一致. 对式(4.22) 再积分，有

$$
\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}\alpha_1 \mathrm{d}\alpha_2\ |\alpha_1, \alpha_2\rangle\langle\alpha_1, \alpha_2| \\
&= \int \frac{\mathrm{d}\alpha_1 \mathrm{d}\alpha_2}{2\pi} : \exp\left\{-\frac{1}{2}[\alpha_1 - (\hat{X}_1 - \hat{X}_2)]^2 - \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2}[\alpha_2 - (\hat{P}_1 + \hat{P}_2)]^2\right\} : \\
&= 1
\end{aligned} \tag{4.25}
$$

或

$$
\int \frac{\mathrm{d}\eta_1 \mathrm{d}\eta_2}{\pi}\ |\eta\rangle\langle\eta| = \int \frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}\ |\eta\rangle\langle\eta| = 1, \tag{4.26}
$$

这说明 $|\eta\rangle$ 具有完备性.

### 4.2.2 两粒子质心坐标与相对动量的共同本征态 $|\xi\rangle$

由于$[\hat{X}_1 + \hat{X}_2, \hat{P}_1 - \hat{P}_2] = 0$，这里也给出它们的共同本征态的形式. 令它们的共同本征态为 $|\beta_1, \beta_2\rangle$，它满足本征方程

$$
\begin{aligned}
(\hat{X}_1 + \hat{X}_2)\ |\beta_1, \beta_2\rangle &= \beta_1\ |\beta_1, \beta_2\rangle, \\
(\hat{P}_1 - \hat{P}_2)\ |\beta_1, \beta_2\rangle &= \beta_2\ |\beta_1, \beta_2\rangle.
\end{aligned} \tag{4.27}
$$

根据

$$
\begin{aligned}
&(\hat{X}_1 + \hat{X}_2)(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) \\
&= \vdots(\hat{X}_1 + \hat{X}_2)(\hat{P}_1 - \hat{P}_2)\vdots \\
&= \vdots(\hat{P}_1 - \hat{P}_2)(\hat{X}_1 + \hat{X}_2)\vdots,
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

所以它经典对应为$(x_2+x_1)(p_1-p_2)$. 因此，利用式(4.11)与式(4.12)，就得到

$$\begin{aligned}&|\beta_1,\beta_2\rangle\langle\beta_1,\beta_2|\\&=\int \mathrm{d}p_1\mathrm{d}x_1\mathrm{d}p_2\mathrm{d}x_2\delta[\beta_1-(x_1+x_2)]\delta[\beta_2-(p_1-p_2)]\cdot\\&\quad\frac{1}{\pi^2}:\exp[-(x_1-\hat{X}_1)^2-(p_1-\hat{P}_1)^2-(x_2-\hat{X}_2)^2-\\&\quad(p_2-\hat{P}_2)^2]:\\&=\frac{1}{2\pi}:\exp\left\{-\frac{1}{2}[\beta_1-(\hat{X}_1+\hat{X}_2)]^2-\right.\\&\quad\left.\frac{1}{2}[\beta_2-(\hat{P}_1-\hat{P}_2)]^2\right\}:.\end{aligned}\tag{4.29}$$

由 $\hat{X}_j=\frac{1}{\sqrt{2}}(a_j+a_j^\dagger)$，$\hat{P}_j=\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{2}}(a_j-a_j^\dagger)$与$:\exp(-a_1^\dagger a_1-a_2^\dagger a_2):=|00\rangle\langle 00|$，导出

$$\begin{aligned}&|\beta_1,\beta_2\rangle\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\beta_1^2+\beta_2^2}{4}+\frac{\beta_1+\mathrm{i}\beta_2}{\sqrt{2}}a_1^\dagger+\frac{\beta_1-\mathrm{i}\beta_2}{\sqrt{2}}a_2^\dagger-a_1^\dagger a_2^\dagger\right)|00\rangle.\end{aligned}\tag{4.30}$$

令 $\xi=\frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_1+\mathrm{i}\beta_2)$，上式就变为

$$\begin{aligned}|\xi\rangle&\equiv\sqrt{2\pi}\;|\beta_1,\beta_2\rangle\\&=\exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2}+\xi a_1^\dagger+\xi^* a_2^\dagger-a_1^\dagger a_2^\dagger\right)|00\rangle,\end{aligned}\tag{4.31}$$

这与文献[67]中结果一致. 对式(4.29)再积分，有

$$\int\mathrm{d}\beta_1\mathrm{d}\beta_2\;|\beta_1,\beta_2\rangle\langle\beta_1,\beta_2|=1\tag{4.32}$$

或

$$\int\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\pi}|\xi\rangle\langle\xi|=1,\tag{4.33}$$

这说明 $|\xi\rangle$ 也具有完备性. $|\xi\rangle$ 与 $|\eta\rangle$ 是互为共轭的.

### 4.2.3　两粒子质量不相等的情况

当两个粒子有不同质量时,常常采用质心坐标

$$\hat{X}_{cm} = \mu_1 \hat{X}_1 + \mu_2 \hat{X}_2 \tag{4.34}$$

与质量权重相对动量

$$\hat{P}_r \equiv \mu_2 \hat{P}_1 - \mu_1 \hat{P}_2 \tag{4.35}$$

来把两体问题约化,其中

$$\mu_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad \mu_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad \mu_1 + \mu_2 = 1. \tag{4.36}$$

很显然 $\hat{X}_{cm}$ 与 $\hat{P}_r$ 相互对易,即$[\hat{X}_{cm}, \hat{P}_r] = 0$. 因此应该可以求出它们的共同本征态的具体形式,当 $m_1 = m_2$ 时,它应退化为式(4.30)的情况. 当 $m_1 \neq m_2$ 时,记 $\hat{X}_{cm}$ 与 $\hat{P}_r$ 的共同本征态为 $|\chi_{cm}, \rho_r\rangle$,满足

$$\hat{X}_{cm} |\chi_{cm}, \rho_r\rangle = \chi_{cm} |\chi_{cm}, \rho_r\rangle, \quad \hat{P}_r |\chi_{cm}, \rho_r\rangle = \rho_r |\chi_{cm}, \rho_r\rangle. \tag{4.37}$$

利用

$$\vdots (\mu_1 \hat{X}_1 + \mu_2 \hat{X}_2)(\mu_2 \hat{P}_1 - \mu_1 \hat{P}_2) \vdots = (\mu_1 \hat{X}_1 + \mu_2 \hat{X}_2)(\mu_2 \hat{P}_1 - \mu_1 \hat{P}_2), \tag{4.38}$$

再根据式(4.11) 与式(4.12) 的基本思想,就有

$$\begin{aligned} |\chi_{cm}, \rho_r\rangle\langle\chi_{cm}, \rho_r| = & \int dp_1 dx_1 dp_2 dx_2 \delta[\chi_{cm} - (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2)] \cdot \\ & \delta[\rho_r - (\mu_2 p_1 - \mu_1 p_2)] \cdot \\ & \frac{1}{\pi^2} : e^{-(x_1 - \hat{X}_1)^2 - (p_1 - \hat{P}_1)^2 - (x_2 - \hat{X}_2)^2 - (p_2 - \hat{P}_2)^2} :, \end{aligned} \tag{4.39}$$

积分之后,考虑 $:\exp(-a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2): = |00\rangle\langle 00|$,得到

$$|\chi_{cm},\rho_r\rangle=\sqrt{\frac{1}{\pi(\mu_2^2+\mu_1^2)}}\exp\left\{-\frac{1}{2(\mu_1^2+\mu_2^2)}(\rho_r^2+\chi_{cm}^2)+\right.$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\mu_1^2+\mu_2^2}[(\chi_{cm}\mu_1+\mathrm{i}\rho_r\mu_2)a_1^\dagger+(\chi_{cm}\mu_2-\mathrm{i}\rho_r\mu_1)a_2^\dagger]+$$

$$\left.\frac{(\mu_2-\mu_1)(a_1^{\dagger 2}-a_2^{\dagger 2})}{2(\mu_1^2+\mu_2^2)}-\frac{2\mu_1\mu_2\,a_1^\dagger a_2^\dagger}{\mu_1^2+\mu_2^2}\right\}|00\rangle. \tag{4.40}$$

引入 $\zeta=\dfrac{\chi_{cm}+\mathrm{i}\rho_r}{\sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2}}=\zeta_1+\mathrm{i}\zeta_2$，则有

$$|\zeta\rangle\equiv\sqrt{\pi(\mu_2^2+\mu_1^2)}\,|\chi_{cm},\rho_r\rangle$$

$$=\exp\left\{-\frac{|\zeta|^2}{2}+\frac{\zeta+(\mu_1-\mu_2)\zeta^*}{\sqrt{2(\mu_1^2+\mu_2^2)}}a_1^\dagger+\frac{\zeta^*-(\mu_1-\mu_2)\zeta}{\sqrt{2(\mu_1^2+\mu_2^2)}}a_2^\dagger+\right.$$

$$\left.\frac{(\mu_2-\mu_1)(a_1^{\dagger 2}-a_2^{\dagger 2})}{2(\mu_1^2+\mu_2^2)}-\frac{2\mu_1\mu_2\,a_1^\dagger a_2^\dagger}{\mu_1^2+\mu_2^2}\right\}|00\rangle, \tag{4.41}$$

注意这里已考虑 $\mu_1+\mu_2=1$，与文献[68]中结果一致. 同样对式(4.41)再积分，有

$$\int\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\pi}|\zeta\rangle\langle\zeta|=1. \tag{4.42}$$

## 4.3 量子力学三体相容算符的共同本征态

本节构造三体算符的共同本征矢，试求相互对易算符 $\hat{X}_1-\hat{X}_2$，$\hat{X}_1-\hat{X}_3$ 和 $\hat{P}_1+\hat{P}_2+\hat{P}_3$ 所决定的共同本征态[69]，假设其满足本征方程

$$(\hat{X}_1-\hat{X}_2)|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle=\chi_1|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle,$$

$$(\hat{X}_1-\hat{X}_3)|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle=\chi_2|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle, \tag{4.43}$$

$$(\hat{P}_1+\hat{P}_2+\hat{P}_3)|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle=\rho|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle.$$

利用 $\hat{X}^2\hat{P}$ 的 Weyl 编序形式

$$\vdots \hat{X}^2 \hat{P} \vdots = \left(\frac{1}{2}\right)^2 (\hat{X}^2 \hat{P} + 2\hat{X}\hat{P}\hat{X} + \hat{P}\hat{X}^2), \qquad (4.44)$$

可以导出

$$\begin{aligned} &\vdots (\hat{X}_1 - \hat{X}_2)(\hat{X}_1 - \hat{X}_3)(\hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \hat{P}_3) \vdots \\ &= (\hat{X}_1 - \hat{X}_2)(\hat{X}_1 - \hat{X}_3)(\hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \hat{P}_3), \end{aligned} \qquad (4.45)$$

因此,它相应的 Weyl 经典对应为$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(p_1 + p_2 + p_3)$. 根据式(4.11) 与式(4.12) 的结论,有

$$\begin{aligned} &|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle\langle\rho,\chi_1,\chi_2| \\ &= \int \mathrm{d}p_1 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}p_2 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}p_3 \mathrm{d}x_3 \delta[\chi_1 - (x_1 - x_2)] \cdot \\ &\quad \delta[\chi_2 - (x_1 - x_3)]\delta[\rho - (p_1 + p_2 + p_3)]\Delta_3 \\ &= \frac{1}{\pi^3}\int \mathrm{d}p_1 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}p_2 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}p_3 \mathrm{d}x_3 \delta[\chi_1 - (x_1 - x_2)]\delta[\chi_2 - (x_1 - x_3)] \cdot \\ &\quad \delta[\rho - (p_1 + p_2 + p_3)] : \prod_{i=1}^{3} \mathrm{e}^{-(x_i - \hat{X}_i)^2 - (p_i - \hat{P}_i)^2} :. \end{aligned} \qquad (4.46)$$

对式 (4.46) 的右边积分后并利用 $:\exp\left(-\sum_{i=1}^{3} a_i^\dagger a_i\right): = |000\rangle\langle 000|$,就能导出

$$\begin{aligned} |\rho,\chi_1,\chi_2\rangle = &\frac{1}{\sqrt{3}\pi^{\frac{3}{4}}}\exp\Big[-\frac{\rho^2}{6} - \frac{1}{3}(\chi_1^2 - \chi_1\chi_2 + \chi_2^2) + \\ &\frac{\sqrt{2}}{3} a_1^\dagger(\mathrm{i}\rho + \chi_1 + \chi_2) + \frac{\sqrt{2}}{3} a_2^\dagger(\mathrm{i}\rho - 2\chi_1 + \chi_2) + \\ &\frac{\sqrt{2}}{3} a_3^\dagger(\mathrm{i}\rho + \chi_1 - 2\chi_2) + \frac{2}{3}(a_1^\dagger a_2^\dagger + a_1^\dagger a_3^\dagger + a_2^\dagger a_3^\dagger) - \\ &\frac{1}{6}(a_1^{\dagger 2} + a_2^{\dagger 2} + a_3^{\dagger 2})\Big]|000\rangle. \end{aligned} \qquad (4.47)$$

再根据式(4.14),就有

$$\int \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\chi_1 \mathrm{d}\chi_2 \; |\rho,\chi_1,\chi_2\rangle\langle\rho,\chi_1,\chi_2| = 1, \qquad (4.48)$$

即 $|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle$ 具有完备性.

实际上,上面考虑的三粒子质量是相同的. 当三个粒子有不同

质量时，也存在这样一组对易算符 $\left(\frac{\hat{P}_1}{\mu_1}-\frac{\hat{P}_2}{\mu_2}\right)$，$\left(\frac{\hat{P}_1}{\mu_1}-\frac{\hat{P}_3}{\mu_3}\right)$ 和 $(\mu_1\hat{X}_1+\mu_2\hat{X}_2+\mu_3\hat{X}_3)$，其中 $\sum_{i=1}^{3}\mu_i=1$，令 $|\chi,\rho_1,\rho_2\rangle$ 为它们的共同本征态，且满足如下本征方程：

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\hat{P}_1}{\mu_1}-\frac{\hat{P}_2}{\mu_2}\right)|\chi,\rho_1,\rho_2\rangle=\rho_2\ |\chi,\rho_1,\rho_2\rangle,\\
&\left(\frac{\hat{P}_1}{\mu_2}-\frac{\hat{P}_3}{\mu_3}\right)|\chi,\rho_1,\rho_2\rangle=\rho_3\ |\chi,\rho_1,\rho_2\rangle,\\
&(\mu_1\hat{X}_1+\mu_2\hat{X}_2+\mu_3\hat{X}_3)\ |\chi,\rho_1,\rho_2\rangle=\chi\ |\chi,\rho_1,\rho_2\rangle.
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

同样根据式(4.11)与式(4.12)的基本思想，有

$$
\begin{aligned}
&|\chi,\rho_1,\rho_2\rangle\langle\chi,\rho_1,\rho_2|\\
&=\frac{1}{\pi^3}\int\prod_{i=1}^{3}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}p_i\delta\left[\rho_1-\left(\frac{p_1}{\mu_1}-\frac{p_2}{\mu_2}\right)\right]\delta\left[\rho_2-\left(\frac{p_1}{\mu_2}-\frac{p_3}{\mu_3}\right)\right]\cdot\\
&\quad\delta[\chi-(\mu_1x_1+\mu_2x_2+\mu_3x_3)]\cdot\\
&\quad:\exp\left[-\sum_{j=1}^{3}[(x_j-\hat{X}_j)^2+(p_j-\hat{P}_j)^2]\right]:\\
&=\frac{1}{\pi^{3/2}}\frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{\lambda}:\exp\left[-\frac{1}{\lambda}[\mu_1\mu_2\rho_2-(\mu_2\hat{P}_1-\mu_1\hat{P}_2)]^2-\right.\\
&\quad\frac{1}{\lambda}[\mu_1\mu_3\rho_3-(\mu_3\hat{P}_1-\mu_1\hat{P}_3)]^2-\\
&\quad\frac{1}{\lambda}[\chi-(\mu_1\hat{X}_1+\mu_2\hat{X}_2+\mu_3\hat{X}_3)]^2-\\
&\quad\left.\frac{1}{\lambda}[\mu_2\mu_3(\rho_3-\rho_2)-(\mu_3\hat{P}_2-\mu_2\hat{P}_3)]^2\right]:,
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

式中：$\lambda\equiv\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2$. 根据 $|000\rangle\langle000|=:\exp\left(-\sum_{i=1}^{3}a_i^\dagger a_i\right):$，对式(4.50)的右边进行分拆，就有

$$
\begin{aligned}
&|\chi,\rho_1,\rho_2\rangle \\
&= \frac{\sqrt{\frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{\lambda}}}{\pi^{3/4}}\exp\Big[-\frac{1}{2\lambda}[(\mu_1^2+\mu_3^2)\mu_2^2\rho_2^2 + \\
&(\mu_1^2+\mu_2^2)\mu_3^2\rho_3^2 - 2\mu_2^2\mu_3^2\rho_2\rho_3] - \\
&\frac{\chi^2}{2\lambda}+\frac{\sqrt{2}\chi}{2}\sum_{j=1}^{3}\mu_j a_j^\dagger + \frac{\mathrm{i}\sqrt{2}\mu_2\rho_2}{\lambda}[\mu_1\mu_2 a_1^\dagger + \\
&\mu_2\mu_3 a_3^\dagger - (\mu_1^2+\mu_3^2)a_2^\dagger] + \\
&\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{\mu_j^2}{\lambda}\right)a_j^{\dagger 2} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{2}\mu_3\rho_3}{\lambda}[\mu_1\mu_3 a_1^\dagger + \mu_2\mu_3 a_2^\dagger - \\
&(\mu_1^2+\mu_2^2)a_3^\dagger] - \frac{2}{\lambda}\sum_{j<k=1}^{3}\mu_j\mu_k a_j^\dagger a_k^\dagger\Big]|000\rangle, \qquad (4.51)
\end{aligned}
$$

这与文献[70]结果是完全一致的.同样有完备性

$$\int \mathrm{d}\rho_1\mathrm{d}\rho_2\mathrm{d}\chi\,|\chi,\rho_1,\rho_2\rangle\langle\chi,\rho_1,\rho_2| = 1. \qquad (4.52)$$

这样,利用 Wigner 算符的广义 Radon 变换能够很方便地导出文献[71～73]中的多模连续变量的纠缠态表象,并知道它们是完备的.

# 第 5 章　两体连续纠缠态表象的应用

纠缠态是量子通信与量子计算的基础，它起源于爱因斯坦等人的思想，是量子力学的精粹所在[74,75]. 而连续纠缠态表象的建立与发展[4]，不仅仅是为了便于讨论一些物理问题或是追求形式上的美，更主要的是量子纠缠现象只有在此表象中才能说明得更清楚，也能使物理概念更加清晰，很多复杂的计算可以在此表象内进行简捷的定量计算而得以完成. 例如，熟知的双模光场的压缩变换与两体连续纠缠态表象密切相关[76]. 目前，连续纠缠态表象已被广泛地应用于研究量子光学的压缩态[77]、Wigner 函数[78]、解量子主方程[79]、热场动力学[80]、量子信息[81]等领域. 连续纠缠态表象也是从量子光学变换向经典光学变换过渡的"桥梁"[82]. 本章主要介绍两体连续纠缠态表象的一些应用.

## 5.1　纠缠态表象中的 Weyl 变换、Wigner 算符与 Weyl 对应规则

在第 4 章中已给出了两体纠缠态

$$|\eta\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\eta|^2 + \eta a_1^\dagger - \eta^* a_2^\dagger + a_1^\dagger a_2^\dagger\right)|00\rangle, \quad \eta = \eta_1 + \mathrm{i}\eta_2, \tag{5.1}$$

它满足

$$(\hat{X}_1 - \hat{X}_2)|\eta\rangle = \sqrt{2}\eta_1|\eta\rangle, \quad (\hat{P}_1 + \hat{P}_2)|\eta\rangle = \sqrt{2}\eta_2|\eta\rangle,$$

$$(a_1 - a_2^\dagger)|\eta\rangle = \eta|\eta\rangle, \quad (a_1^\dagger - a_2)|\eta\rangle = \eta^*|\eta\rangle, \tag{5.2}$$

并具有正交性与完备性

$$\int \frac{d^2\eta}{\pi}|\eta\rangle\langle\eta| = 1, \quad \langle\eta|\eta'\rangle = \pi\delta(\eta-\eta')\delta(\eta^*-\eta'^*). \tag{5.3}$$

在文献[77]中已证明双模压缩算符 $S_2(\lambda)$ 在纠缠态 $|\eta\rangle$ 中有一个很自然的形式

$$\begin{aligned} S_2(\lambda) &= \int \frac{d^2\eta}{\pi\mu}\left|\frac{\eta}{\mu}\right\rangle\langle\eta| \\ &= \exp[\lambda(a_1^\dagger a_1^\dagger - a_1a_2)], \quad \mu = e^\lambda. \end{aligned} \tag{5.4}$$

令 $\langle\eta'|\ \hat{H}(a_1^\dagger,a_2^\dagger,a_1,a_2)\ |\eta\rangle$ 是一矩阵元，引入其广义的 Weyl 变换为

$$h(\sigma,\gamma) = 4\int \frac{d^2\eta}{\pi}e^{\eta^*\gamma-\eta\gamma^*}\langle\sigma-\eta|\ \hat{H}(a_1^\dagger,a_2^\dagger,a_1,a_2)\ |\sigma+\eta\rangle, \tag{5.5}$$

这里：$h(\sigma,\gamma)$ 是两个独立复参量 $\sigma,\gamma$ 的一个经典函数. 由于 $\eta^*\gamma-\eta\gamma^*$ 是纯虚数，$e^{\eta^*\gamma-\eta\gamma^*}$ 可以看成是 Fourier 变换核，因此式(5.5)的逆变换为

$$\langle\sigma-\eta|\ \hat{H}(a_1^\dagger,a_2^\dagger,a_1,a_2)\ |\sigma+\eta\rangle = \int \frac{d^2\gamma}{4\pi}h(\sigma,\gamma)e^{\gamma\eta^*-\gamma^*\eta}. \tag{5.6}$$

设 $\sigma+\eta=\sigma',\sigma-\eta=\sigma''$，则

$$\begin{aligned} &\langle\sigma''|\ \hat{H}(a_1^\dagger,a_2^\dagger,a_1,a_2)\ |\sigma'\rangle \\ &= \int \frac{d^2\gamma}{4\pi}h\left(\frac{\sigma''+\sigma'}{2},\gamma\right)\exp\{[(\sigma'-\sigma'')\gamma^*-\gamma(\sigma'^*-\sigma''^*)]/2\}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

在式(5.7)的两边同时左乘 $\int \frac{d^2\sigma''}{\pi}|\sigma''\rangle$ 并右乘 $\int\langle\sigma'|\frac{d^2\sigma'}{\pi}$，根据纠缠态的完备性 $\int \frac{d^2\sigma'}{\pi}|\sigma'\rangle\langle\sigma'| = 1$，得到

$$\hat{H}(a_1^\dagger,a_2^\dagger,a_1,a_2) = \int d^2\sigma''\ |\sigma''\rangle\int\langle\sigma'|\ d^2\sigma'\int\frac{d^2\gamma}{4\pi^3}h\left(\frac{\sigma''+\sigma'}{2},\gamma\right)\cdot$$

$$\exp\{[(\sigma'-\sigma'')\gamma^*-\gamma(\sigma'^*-\sigma''^*)]/2\},\tag{5.8}$$

然后作积分变量变换 $d^2\sigma''d^2\sigma'\to 4d^2\sigma d^2\eta$，有

$$\hat{H}(a_1^\dagger,a_2^\dagger,a_1,a_2)=\frac{1}{\pi^3}\int d^2\gamma\int d^2\sigma d^2\eta h(\sigma,\gamma)e^{\eta\gamma^*-\eta^*\gamma}|\sigma-\eta\rangle\langle\sigma+\eta|$$

$$=\int d^2\gamma\int d^2\sigma h(\sigma,\gamma)\Delta(\sigma,\gamma),\tag{5.9}$$

式中定义了

$$\Delta(\sigma,\gamma)=\int\frac{d^2\eta}{\pi^3}e^{\eta\gamma^*-\eta^*\gamma}|\sigma-\eta\rangle\langle\sigma+\eta|.\tag{5.10}$$

将式(5.1)代入式(5.10)并利用 IWOP 技术对式(5.10)进行积分，得到 $\Delta(\sigma,\gamma)$ 的正规乘积形式

$$\Delta(\sigma,\gamma)=\pi^{-2}:\exp[-|\sigma-(a_1-a_2^\dagger)|^2-|\gamma-(a_2^\dagger+a_1)|^2]:.\tag{5.11}$$

若令

$$\gamma=\alpha+\beta^*,\quad \sigma=\alpha-\beta^*,$$

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+ip_1),\quad \beta=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_2+ip_2),\tag{5.12}$$

就有

$$:\exp[-|\sigma-(a_1-a_2^\dagger)|^2-|\gamma-(a_2^\dagger+a_1)|^2]:$$
$$=:\exp[-2(\alpha^*-a_1^\dagger)(\alpha-a_1)-2(\beta^*-a_2^\dagger)(\beta-a_2)]:.\tag{5.13}$$

将 $\Delta(\sigma,\gamma)$ 与式(2.59)中的单模 Wigner 算符正规乘积比较，不难看出 $\Delta(\sigma,\gamma)$ 正是两个单模 Wigner 算符的乘积形式，即

$$\Delta(\sigma,\gamma)=\Delta(\alpha,\alpha^*)\Delta(\beta,\beta^*),\tag{5.14}$$

所以 $\Delta(\sigma,\gamma)$ 被称为纠缠形式的 Wigner 算符. 那么为什么一定要引入纠缠形式的 Wigner 算符呢？原因是对于两个纠缠在一起的粒子，说每个个别粒子处在什么量子态下已无意义，必须把这两个粒子作为一个统一体来描述. 而 $\Delta(\sigma,\gamma)$ 就具备这个功能，它的边缘分布为

$$\int d^2\sigma\Delta(\sigma,\gamma) = \frac{1}{\pi} : \exp[-(\gamma - a_1 - a_2^\dagger)(\gamma^* - a_1^\dagger - a_2)] :$$

$$= \frac{1}{\pi} |\xi\rangle\langle\xi|_{\xi=\gamma}, \tag{5.15}$$

式中:纠缠态 $|\xi\rangle$ 是 $|\eta\rangle$ 的共轭态[见第 4 章中式(4.31)].

$$|\xi\rangle = \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2} + \xi a_1^\dagger + \xi^* a_2^\dagger - a_1^\dagger a_2^\dagger\right)|00\rangle, \quad \xi = \xi_1 + i\xi_2 \tag{5.16}$$

满足

$$(\hat{X}_1 + \hat{X}_2)|\xi\rangle = \sqrt{2}\xi_1 |\xi\rangle, \quad (\hat{P}_1 - \hat{P}_2)|\xi\rangle = \sqrt{2}\xi_2 |\xi\rangle,$$

$$(a_1 + a_2^\dagger)|\xi\rangle = \xi|\xi\rangle, \quad (a_1^\dagger + a_2)|\xi\rangle = \xi^* |\xi\rangle. \tag{5.17}$$

另一边缘分布是

$$\int d^2\gamma\Delta(\sigma,\gamma) = \frac{1}{\pi} |\eta\rangle\langle\eta|_{\eta=\sigma}. \tag{5.18}$$

因此,对于双粒子态 $|\psi\rangle$ 的 Wigner 函数的边缘分布分别是

$$\int d^2\sigma\langle\psi|\Delta(\sigma,\gamma)|\psi\rangle = \frac{1}{\pi} |\psi(\xi)|^2_{\xi=\gamma}, \tag{5.19}$$

和

$$\int d^2\gamma\langle\psi|\Delta(\sigma,\gamma)|\psi\rangle = \frac{1}{\pi} |\psi(\eta)|^2_{\eta=\sigma}, \tag{5.20}$$

式中:$|\psi(\xi)|^2_{\xi=\gamma}$($|\psi(\eta)|^2_{\eta=\sigma}$)代表了发现两粒子处于相对动量为 $\sqrt{2}\xi_2$(总动量$\sqrt{2}\eta_2$)和质心位置为$\sqrt{2}\xi_1$(相对位置为$\sqrt{2}\eta_1$)的概率,也就是纠缠形式的 Wigner 算符的边缘分布反映出了纠缠特性.利用IWOP技术还可以证明纠缠 Wigner算符在 $|\xi\rangle$ 表象中表示形式为

$$\Delta(\sigma,\gamma) = \int \frac{d^2\xi}{\pi^3} |\gamma - \xi\rangle\langle\gamma + \xi| e^{\sigma\xi^* - \xi\sigma^*} \tag{5.21}$$

从式(5.10)来看,密度算符 $\rho$ 的 Wigner 函数为

$$\mathrm{tr}[\rho\Delta(\sigma,\gamma)] = W_\rho(\sigma,\gamma)$$

$$= \int \frac{d^2\eta}{\pi^3} \langle\sigma + \eta|\rho|\sigma - \eta\rangle \exp(\eta\gamma^* - \eta^*\gamma), \tag{5.22}$$

当 $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ 为一纯态时，有

$$W_\psi(\sigma,\gamma) = \int \frac{d^2\eta}{\pi^3}\psi(\sigma+\eta)\psi^*(\sigma-\eta)e^{\eta\gamma^*-\eta^*\gamma}. \quad (5.23)$$

为了能很清楚地看出其物理意义，利用 δ 函数的积分公式，对上式进行积分：

$$\int d^2\gamma W(\sigma,\gamma) = \int \frac{d^2\eta}{\pi}\psi(\sigma+\eta)\psi^*(\sigma-\eta)\delta(\eta)\delta(\eta^*) = \frac{1}{\pi}|\psi(\sigma)|^2, \quad (5.24)$$

这给出复函数 $\psi(\sigma)$ 的几率分布. 另一方面，令 $\psi(\sigma)$ 的 Fourier 变换为 $j(\zeta)$，有

$$\psi(\sigma) = \int \frac{d^2\zeta}{2\pi} j(-\zeta)e^{(\zeta^*\sigma-\zeta\sigma^*)/2}, \quad (5.25)$$

代入到式(5.23)，有

$$\begin{aligned}W(\sigma,\gamma) &= \int \frac{d^2\eta d^2\zeta d^2\zeta'}{4\pi^5} j(-\zeta)j^*(-\zeta')\cdot \\ &\quad \exp\left[\frac{(\zeta^*-\zeta'^*)\sigma-(\zeta-\zeta')\sigma^*}{2}\right]\cdot \\ &\quad \exp\left[\eta\left(\gamma^*+\frac{\zeta^*+\zeta'^*}{2}\right)-\eta^*\left(\gamma+\frac{\zeta+\zeta'}{2}\right)\right] \\ &= \int \frac{d^2\zeta}{\pi^3} j(-\zeta)j^*(2\gamma+\zeta)e^{(\zeta^*+\gamma^*)\sigma-(\zeta+\gamma)\sigma^*} \\ &= \int \frac{d^2\zeta}{\pi^3} j(r-\zeta)j^*(\gamma+\zeta)e^{\zeta^*\sigma-\zeta\sigma^*}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

再对式(5.26) 如下积分，即

$$\begin{aligned}\int d^2\sigma W(\sigma,\gamma) &= \int \frac{d^2\zeta}{\pi^3} j(r-\zeta)j^*(\zeta+\gamma)\int d^2\sigma\, e^{\zeta^*\sigma-\zeta\sigma^*} \\ &= \int \frac{d^2\zeta}{\pi} j(r-\zeta)j^*(\zeta+\gamma)\delta(\zeta)\delta(\zeta^*) \\ &= \frac{1}{\pi}|j(\gamma)|^2, \end{aligned} \quad (5.27)$$

这正是 $\psi(\sigma)$ 的共轭函数的几率分布. $W(\sigma,\gamma)$ 是正确的二维复 Wigner 函数. 如果在 $\langle\eta|$ 表象中定义如下的两个波函数

$$e^{\eta\gamma^*-\gamma\eta^*}\psi^*(\sigma-\eta)=\phi_1(\eta),\psi(\sigma+\eta)=\phi_2(\eta). \quad (5.28)$$

利用纠缠态表象的完备性关系，式(5.23)可以被重新改写为

$$\begin{aligned}W_\psi(\sigma,\gamma)&=\int\frac{d^2\eta}{\pi^3}\phi_1^*(\eta)\phi_2(\eta)\\&=\frac{1}{\pi^2}\int\frac{d^2\eta}{\pi}\langle\phi_1|\eta\rangle\langle\eta|\phi_2\rangle\\&=\frac{1}{\pi^2}\langle\phi_1|\phi_2\rangle,\end{aligned} \quad (5.29)$$

其中：$\phi_2,\phi_1$ 的归一化由 $\psi$ 决定. 再根据 Schwarz 不等式

$$\begin{aligned}|\langle\phi_1|\phi_2\rangle|^2&=\left|\int\frac{d^2\eta}{\pi}\phi_1^*(\eta)\phi_2(\eta)\right|^2\\&\leqslant\int\frac{d^2\eta}{\pi}|\phi_1(\eta)|^2\cdot\int\frac{d^2\eta'}{\pi}|\phi_2(\eta')|^2=1,\end{aligned} \quad (5.30)$$

这就给出了纠缠 Wigner 函数的上界

$$|W_\psi(\sigma,\gamma)|\leqslant\frac{1}{\pi^2}, \quad (5.31)$$

所以一个归一化的纯态的 Wigner 函数的取值不大于 $\frac{1}{\pi^2\hbar^2}$（补上 $\hbar$）.

最后，要说明的是式(5.9)就是纠缠形式 Weyl 对应规则，$h(\sigma,\gamma)$ 是 $\hat{H}(a_1^\dagger,a_2^\dagger,a_1,a_2)$ 的经典对应函数. 把第 2 章中任意算符的 Weyl 编序展开式(2.76)推广到双模情况

$$\begin{aligned}\rho=4\int\frac{d^2\beta_1 d^2\beta_2}{\pi^2}&\vdots\langle-\beta_1,-\beta_2|\rho|\beta_1,\beta_2\rangle\cdot\\&\exp\left[2\sum_{j=1}^{2}(a_j^\dagger a_j+a_j\beta_j^*-\beta_j a_j^\dagger)\right]\vdots,\end{aligned} \quad (5.32)$$

其中：$|\beta_1,\beta_2\rangle$ 为双模相干态，再将式(5.11)代入式(5.32)，得到 $\Delta(\sigma,\gamma)$ 的 Weyl 编序形式

$$\begin{aligned}\Delta(\sigma,\gamma)=&\vdots\delta(a_1-a_2^\dagger-\sigma)\delta(a_1^\dagger-a_2-\sigma^*)\delta(a_1+a_2^\dagger-\gamma)\cdot\\&\delta(a_1^\dagger+a_2-\gamma^*)\vdots.\end{aligned} \quad (5.33)$$

根据 IWWOP 技术，就有

$$\vdots h(a_1^\dagger,a_2^\dagger,a_1,a_2) \vdots = \int d^2\gamma d^2\sigma h(\sigma,\gamma)\Delta(\sigma,\gamma). \quad (5.34)$$

这种 Weyl 编序形式十分简洁，对于研究纠缠态的量子 Tomography 理论十分有用. 纠缠形式的 Wigner 算符对于计算纠缠态的 Wigner 函数特别方便，例如在双模压缩算符 $S_2$ 作用下，根据式(5.4)，式(5.10) 以及纠缠态的完备性，就有

$$S_2\Delta(\sigma,\gamma)S_2^{-1} = \Delta(\sigma/\mu,\mu\gamma), \quad (5.35)$$

于是很容易得到双模压缩真空态的 Wigner 函数

$$\begin{aligned}\langle 00|\ S_2\Delta(\sigma,\gamma)S_2^{-1}\ |00\rangle &= \langle 00|\ \Delta(\sigma/\mu,\mu\gamma)\ |00\rangle \\ &= \pi^{-2}\exp(-|\sigma^2|\ /\mu^2 - |\gamma|^2\mu^2). \quad (5.36)\end{aligned}$$

## 5.2 正定的纠缠 Wigner 算符与不同质量的两体纠缠态表象

由于 Wigner 函数 $\langle\psi|\ \Delta(\sigma,\gamma)\ |\psi\rangle$ 不总是正定值，我们用一个方便而直接的方法给出正定纠缠形式 Wigner 算符与不同质量两粒子的正定纠缠形式 Wigner 算符[83]. 先推导单模正定的 Wigner 算符. 前面已给出单模 Wigner 算符的正规乘积形式为

$$\Delta(x,p) = \frac{1}{\pi} : \exp[-(x-\hat{X}_1)^2 - (p-\hat{P}_1)^2]:, \quad (5.37)$$

通过 $\hat{X}_1$ 项乘以 $\frac{\kappa}{1+\kappa}$ 而 $\hat{P}_1$ 项乘以 $\frac{1/\kappa}{1+1/\kappa}$ 来改写上式($\kappa > 0$)，即引入

$$\begin{aligned}&\Delta(x,p;\sqrt{\kappa}) \\ &\equiv \frac{\sqrt{\kappa}}{\pi(1+\kappa)} : \exp\left[-\frac{\kappa}{1+\kappa}(x-\hat{X})^2 - \frac{\frac{1}{\kappa}}{1+\frac{1}{\kappa}}(p-\hat{P})^2\right]:,\end{aligned}$$

(5.38)

看它是否能写成 $|x,p;\kappa\rangle\langle x,p;\kappa|$ 的形式(投影算符)?

根据: $\exp(-a^{\dagger}a):=|0\rangle\langle 0|$,可确定 $|x,p;\kappa\rangle$ 的形式为

$$|x,p;\kappa\rangle=\frac{\kappa^{1/4}}{\sqrt{\pi(1+\kappa)}}\exp\left\{-\frac{1}{1+\kappa}\left[\frac{\kappa x^2}{2}+\frac{p^2}{2}-(\sqrt{2}\kappa x+\mathrm{i}\sqrt{2}p)a_1^{\dagger}-\frac{\kappa-1}{2}a_1^{\dagger}\right]\right\}|0\rangle,\quad(5.39)$$

这里$a_1^{\dagger}=\frac{\hat{X}_1+\mathrm{i}\hat{P}_1}{\sqrt{2}}$. $|x,p;k\rangle$ 是一个单模压缩相干态. 很显然,对于一纯态 $|\psi\rangle$ 的广义 Wigner 函数$\langle\psi|\Delta(x,p;\sqrt{\kappa})|\psi\rangle=|\langle x,p;\kappa|\psi\rangle|^2$ 总是为正值. 根据上述思想以及纠缠形式的 Wigner 算符的正规乘积形式(5.11),引入

$$\Delta(\sigma,\gamma;\kappa)\equiv\frac{\kappa}{\pi^2(1+\kappa)^2}:\exp\left[-\frac{\kappa}{1+\kappa}(\sigma-a_1+a_2^{\dagger})(\sigma^*-a_1^{\dagger}+a_2)-\frac{\kappa^{-1}}{1+\kappa^{-1}}(\gamma-a_1-a_2^{\dagger})(\gamma^*-a_1^{\dagger}-a_2)\right]:,\quad(5.40)$$

再利用: $\mathrm{e}^{-a_1^{\dagger}a_1-a_2^{\dagger}a_2}:=|00\rangle\langle 00|$,有

$$\Delta(\sigma,\gamma;\kappa)=|\sigma,\gamma;\kappa\rangle\langle\sigma,\gamma;\kappa|\quad(5.41)$$

它也是纯态投影子, $|\sigma,\gamma;\kappa\rangle$ 为

$$|\sigma,\gamma;\kappa\rangle=\frac{\sqrt{\kappa}}{\pi(1+\kappa)}\exp\left\{-\frac{1}{1+\kappa}\left[\frac{\kappa|\sigma|^2}{2}+\frac{|\gamma|^2}{2}-(\kappa\sigma+\gamma)a_1^{\dagger}+(\kappa\sigma^*-\gamma^*)a_2^{\dagger}-(\kappa-1)a_1^{\dagger}a_2^{\dagger}\right]\right\}|00\rangle,\quad(5.42)$$

它是一个双模压缩相干态,这就保证

$$\langle\psi|\Delta(\sigma,\gamma;\kappa)|\psi\rangle=|\langle\sigma,\gamma;\kappa|\psi\rangle|^2\geqslant 0.\quad(5.43)$$

在文献[77]中给出对于不同质量两粒子的纠缠形式 Wigner 算符的正规乘积

$$\begin{aligned}\Delta(\sigma,\gamma)_g=\frac{1}{\pi^2}:\exp\{&-[\gamma-f(a_1+a_2^{\dagger})-g(a_1^{\dagger}-a_2)]\cdot\\&[\gamma^*-f(a_1^{\dagger}+a_2)-g(a_1-a_2^{\dagger})]-\\&[\sigma-f(a_1^{\dagger}-a_2)+g(a_1+a_2^{\dagger})]\cdot\end{aligned}$$

$$[\sigma^* - f(a_1 - a_2^\dagger) + g(a_1^\dagger + a_2)]\} :, \qquad (5.44)$$

式中：$f,g$ 是两个实数，满足 $f^2+g^2=1$，下标 $g$ 表示纠缠 Wigner 算符与 $g$ 相关. 它的边缘分布为

$$\int \frac{d^2\sigma}{\pi}\Delta(\sigma,\gamma)_g = \frac{1}{\pi} : \exp\{-[\gamma - f(a_1 + a_2^\dagger) - g(a_1^\dagger - a_2)] \cdot$$

$$[\gamma^* - f(a_1^\dagger + a_2) - g(a_1 - a_2^\dagger)]\} :. \qquad (5.45)$$

利用 $:e^{-a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2}: = |00\rangle\langle 00|$，上式可改写为

$$\int d^2\sigma\Delta(\sigma,\gamma)_g = \frac{1}{\pi}|\gamma\rangle_{gg}\langle\gamma|, \qquad (5.46)$$

式中：$|\gamma\rangle_g$ 是一种新的纠缠态，为

$$|\gamma\rangle_g = \exp\Big[-\frac{1}{2}|\gamma|^2 + (f\gamma + g\gamma^*)a_1^\dagger + (f\gamma^* - g\gamma)a_2^\dagger -$$

$$fg(a_1^{\dagger 2} - a_2^{\dagger 2}) - (f^2 - g^2)a_1^\dagger a_2^\dagger\Big]|00\rangle. \qquad (5.47)$$

它满足本征方程

$$[f(a_1 + a_2^\dagger) + g(a_1^\dagger - a_2)]|\gamma\rangle_g = \gamma|\gamma\rangle_g,$$

$$[f(a_1^\dagger + a_2) + g(a_1 - a_2^\dagger)]|\gamma\rangle_g = \gamma^*|\gamma\rangle_g, \qquad (5.48)$$

或者

$$[(f+g)(a_1 + a_1^\dagger) + (f-g)(a_2 + a_2^\dagger)]|\gamma\rangle_g = 2\gamma_1|\gamma\rangle_g,$$

$$[(f-g)(a_1 - a_1^\dagger) + (f+g)(a_2^\dagger - a_2)]|\gamma\rangle_g = 2i\gamma_2|\gamma\rangle_g. \qquad (5.49)$$

另一边缘分布为

$$\int d^2\gamma\Delta(\sigma,\gamma)_g = \frac{1}{\pi} : \exp\{-[\sigma - f(a_1^\dagger - a_2) + g(a_1 + a_2^\dagger)] \cdot$$

$$[\sigma^* - f(a_1 - a_2^\dagger) + g(a_1^\dagger + a_2)]\} :, \qquad (5.50)$$

进一步分解为

$$\int d^2\gamma\Delta(\sigma,\gamma)_g = \frac{1}{\pi}|\sigma\rangle_{gg}\langle\sigma|, \qquad (5.51)$$

式中：

$$|\sigma\rangle_g = \exp\Big[-\frac{1}{2}|\sigma|^2 + (f\sigma - g\sigma^*)a_1^\dagger - (f\sigma^* + g\sigma)a_2^\dagger +$$

$$fg(a_1^{\dagger 2}-a_2^{\dagger 2})+(f^2-g^2)a_1^\dagger a_2^\dagger\Big]|00\rangle \tag{5.52}$$

是另一个新的纠缠态,满足

$$\begin{aligned}&[f(a_1^\dagger-a_2)-g(a_1+a_2^\dagger)]\,|\sigma\rangle_g=\sigma\,|\sigma\rangle_g,\\&[f(a_1-a_2^\dagger)-g(a_1^\dagger+a_2)]\,|\sigma\rangle_g=\sigma^*\,|\sigma\rangle_g.\end{aligned} \tag{5.53}$$

可以看出,$|\gamma\rangle_g$ 与 $|\sigma\rangle_g$ 是相互共轭的.

对于两个粒子的不同质量 $m_j$,令 $\mu_j=\dfrac{m_j}{m_1+m_2}$,$j=1,2$,以及

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{\mu_1}{2}}+\sqrt{\frac{\mu_2}{2}}=f,\quad \sqrt{\frac{\mu_1}{2}}-\sqrt{\frac{\mu_2}{2}}=g,\\&f^2+g^2=\mu_1+\mu_2=1.\end{aligned} \tag{5.54}$$

当令 $\hbar=1,\omega_j=1,M=m_1+m_2=2$ 时,坐标算符 $\hat{X}_j=\sqrt{\dfrac{\hbar}{2m_j\omega_j}}(a_j+a_j^\dagger)$ 与动量算符 $\hat{P}_j=-\mathrm{i}\sqrt{\dfrac{m_j\omega_j\hbar}{2}}(a_j-a_j^\dagger)$ 的形式为

$$\hat{X}_j=\frac{a_j+a_j^\dagger}{2\sqrt{\mu_j}},\quad \hat{P}_j=-\mathrm{i}\sqrt{\mu_j}(a_j-a_j^\dagger),\quad j=1,2; \tag{5.55}$$

因此,质心坐标的形式为

$$\begin{aligned}\hat{X}_{\mathrm{cm}}&\equiv\mu_1\hat{X}_1+\mu_2\hat{X}_2\\&=\sqrt{\mu_1}(a_1+a_1^\dagger)+\sqrt{\mu_2}(a_2+a_2^\dagger)\\&=\frac{f+g}{\sqrt{2}}(a_1+a_1^\dagger)+\frac{f-g}{\sqrt{2}}(a_2+a_2^\dagger),\end{aligned} \tag{5.56}$$

质量权重相对动量为

$$\begin{aligned}\hat{P}_r&=\mu_2\hat{P}_1-\mu_1\hat{P}_2\\&=-\mathrm{i}\mu_2\mu_1\left(\frac{a_1-a_1^\dagger}{\sqrt{\mu_1}}-\frac{a_2-a_2^\dagger}{\sqrt{\mu_2}}\right)\\&=\frac{f^2-g^2}{\sqrt{2}\mathrm{i}}[(f-g)(a_1-a_1^\dagger)-(f+g)(a_2-a_2^\dagger)].\end{aligned} \tag{5.57}$$

将式(5.56)以及式(5.57)与式(5.49)比较,有可见

$$\hat{X}_{cm}|\gamma\rangle_g=\frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_1|\gamma\rangle_g,$$

$$\hat{P}_r|\gamma\rangle_g=\frac{1}{\sqrt{2}}(f^2-g^2)\gamma_2|\gamma\rangle_g, \tag{5.58}$$

式中：$\gamma=\gamma_1+i\gamma_2$. 所以 $|\gamma\rangle_g$ 是不同质量的两粒子质心坐标与权重相对动量的共同本征态. 另外，从

$$\hat{X}_r=\hat{X}_1-\hat{X}_2=\frac{a_1+a_1^\dagger}{2\sqrt{\mu_1}}-\frac{a_2+a_2^\dagger}{2\sqrt{\mu_2}}, \tag{5.59}$$

$$\hat{P}_c=\hat{P}_1+\hat{P}_2=-i\sqrt{\mu_1}(a_1-a_1^\dagger)-i\sqrt{\mu_2}(a_2-a_2^\dagger), \tag{5.60}$$

并参照式(5.53)，看出 $|\sigma\rangle_g$ 是两粒子相对坐标与总动量的共同本征态：

$$X_r|\sigma\rangle_g=\frac{\sqrt{2}\sigma_1}{f^2-g^2}|\sigma\rangle_g,\quad P_c|\sigma\rangle_f=\sqrt{2}\sigma_2|\sigma\rangle_g. \tag{5.61}$$

类此式(5.42)，根据式(5.44) 我们给出两个不同质量粒子的纠缠 Wigner 算符的正定形式，即.

$$\begin{aligned}\Delta(\sigma,\gamma;\kappa)_g=&\frac{\kappa}{\pi^2(1+\kappa)^2}:\exp\left\{-\frac{\kappa}{1+\kappa}\right.\\&[(\gamma-fa_1-fa_2^\dagger-ga_1^\dagger+ga_2)\cdot\\&(\gamma^*-fa_1^\dagger-fa_2-ga_1+ga_2^\dagger)]-\\&\frac{1/\kappa}{1/\kappa+1}[(\sigma-fa_1^\dagger+fa_2+ga_1+ga_2^\dagger)\cdot\\&\left.(\sigma^*-fa_1+fa_2^\dagger+ga_1^\dagger+ga_2)]\right\}:\end{aligned} \tag{5.62}$$

仍然考虑：$e^{-a_1^\dagger a_1-a_2^\dagger a_2}:=|00\rangle\langle 00|$，可以找到不同质量的两个粒子的正定的纠缠形式 Wigner 算符

$$\Delta(\sigma,\gamma;\kappa)_g=|\sigma,\gamma;\kappa\rangle_{gg}\langle\sigma,\gamma;\kappa|, \tag{5.63}$$

式中：

$$|\sigma,\gamma;\kappa\rangle_g=\frac{\sqrt{\kappa}}{\pi(1+\kappa)}\exp\left\{-\frac{1}{1+\kappa}\left[\frac{\kappa|\gamma|^2}{2}+\frac{|\sigma|^2}{2}-\right.\right.$$

$$(\kappa\gamma f+\kappa g\gamma^{*}-\sigma g+f\sigma^{*})a_1^{\dagger}-$$
$$(\kappa f\gamma^{*}-\kappa\gamma g-\sigma f-g\sigma^{*})a_2^{\dagger}+$$
$$(\kappa-1)(f^2-g^2)a_1^{\dagger}a_2^{\dagger}+$$
$$fg(\kappa-1)a_1^{\dagger 2}-fg(\kappa-1)a_2^{\dagger 2}]\}|00\rangle. \quad (5.64)$$

式(5.63)保证了

$$\langle\psi|\Delta(\sigma,\gamma;\kappa)_g|\psi\rangle=|_g\langle\sigma,\gamma;\kappa|\psi\rangle|^2\geqslant 0. \quad (5.65)$$

## 5.3 用纠缠态表象求解动量耦合的两体动力学

设描述两带电粒子耦合系统的哈密顿量是

$$\hat{H}=\frac{\hat{P}_1^2}{2m_1}+\frac{\hat{P}_2^2}{2m_2}+\kappa\hat{P}_1\hat{P}_2+F(\hat{X}_1-\hat{X}_2), \quad (5.66)$$

其中：$F$ 是均匀力场. $F>0, x_2\geqslant x_1$. 由于带电粒子的运动生成电流，因此 $\kappa\hat{P}_1\hat{P}_2$ 看作是电流与电流的磁相互作用. 对于这样的系统，总动量 $\hat{P}=\hat{P}_1+\hat{P}_2$ 是守恒的，即

$$[\hat{H},\hat{P}]=0, \quad (5.67)$$

因此，令 $|p,E_n\rangle$ 是 $\hat{H},\hat{P}$ 的共同本征态，且满足

$$\hat{H}|p,E_n\rangle=E_n|p,E_n\rangle, \quad \hat{P}|p,E_n\rangle=p|p,E_n\rangle. \quad (5.68)$$

### 5.3.1 在 $\langle\zeta|$ 表象中求解 $\hat{H}$ 的能量本征波函数

下面在 $\langle\zeta|$ 表象（见式(4.41)）中求解 $\hat{H}$ 的能量本征波函数[84]. 为了获得该系统的能级，由质量权重相对动量 $\hat{P}_r=\mu_2\hat{P}_1-\mu_1\hat{P}_2$ ($\mu_1+\mu_2=1, \mu_i=m_i/(m_1+m_2)$) 易知下列关系：

$$\hat{P}_1=\hat{P}_r+\mu_1\hat{P}, \quad \hat{P}_2=\mu_2\hat{P}-\hat{P}_r, \quad (5.69)$$

进而注意到

$$\frac{\hat{P}_1^2}{2m_1}+\frac{\hat{P}_2^2}{2m_2}=\frac{\hat{P}^2}{2M}+\frac{\hat{P}_r^2}{2\mu}, \tag{5.70}$$

式中：$M=m_1+m_2$ 为总质量，$\mu=\frac{m_1 m_2}{M}$ 为折合质量能够将式(5.66)中哈密顿量 $\hat{H}$ 改写为

$$\hat{H}=\left(\frac{1}{2M}+\kappa\mu_1\mu_2\right)\hat{P}^2+\kappa(\mu_2-\mu_1)\hat{P}\hat{P}_r+\left(\frac{1}{2\mu}-\kappa\right)\hat{P}_r^2+F(\hat{X}_1-\hat{X}_2). \tag{5.71}$$

在第4章中已知道 $\hat{P}_r=\mu_2\hat{P}_1-\mu_1\hat{P}_2$ 与 $\hat{X}_{cm}=\mu_1\hat{X}_1+\mu_2\hat{X}_2$ 的共同本征态为

$$|\zeta\rangle=\exp\Big\{-\frac{1}{2}|\zeta|^2+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}[\zeta+(\mu_1-\mu_2)\zeta^*]a_1^\dagger+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}[\zeta^*-(\mu_1-\mu_2)\zeta]a_2^\dagger+\frac{1}{\lambda}[(\mu_2-\mu_1)(a_1^{\dagger 2}-a_2^{\dagger 2})-4\mu_1\mu_2 a_1^\dagger a_2^\dagger]\Big\}|00\rangle, \tag{5.72}$$

式中：$\zeta=\zeta_1+\mathrm{i}\zeta_2$，$\lambda=2(\mu_1^2+\mu_2^2)$，且满足

$$\hat{X}_{cm}|\zeta\rangle=\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\zeta_1|\zeta\rangle=\sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2}\zeta_1|\zeta\rangle, \tag{5.73}$$

$$\hat{P}_r|\zeta\rangle=\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\zeta_2|\zeta\rangle=\sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2}\zeta_2|\zeta\rangle, \tag{5.74}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\pi}|\zeta\rangle\langle\zeta|=1,\quad \mathrm{d}^2\zeta=\mathrm{d}\zeta_1\mathrm{d}\zeta_2. \tag{5.75}$$

这样，利用式(5.74)式与式(5.68)，在表象 $|\zeta\rangle$ 中，式(5.71)给出

$$E_n\langle\zeta|p,E_n\rangle=\Big[\left(\frac{1}{2M}+\kappa\mu_1\mu_2\right)p^2+\kappa(\mu_2-\mu_1)\cdot\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\zeta_2 p+\frac{\lambda}{2}\zeta_2^2\left(\frac{1}{2\mu}-\kappa\right)\Big]\langle\zeta|p,E_n\rangle+\langle\zeta|F(\hat{X}_1-\hat{X}_2)|p,E_n\rangle \tag{5.76}$$

以及

$$\langle\zeta|\ \hat{P}\ |p,E_n\rangle, = p\langle\zeta|p,E_n\rangle. \tag{5.77}$$

为了进一步化简，借助式(5.1)中的纠缠态 $|\eta\rangle$ 和式(5.72)以及相干态的超完备性计算出$\langle\eta|$ 与 $|\zeta\rangle$ 的内积

$$\langle\eta|\zeta\rangle = \sqrt{\frac{\lambda}{4}}\exp\{\mathrm{i}[(\mu_1-\mu_2)(\eta_1\eta_2-\zeta_1\zeta_2)+\sqrt{\lambda}(\eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1)]\}. \tag{5.78}$$

根据式(5.2)以及式(5.78)，有

$$\begin{aligned}\langle\zeta|\ (\hat{P}_1+\hat{P}_2) &= \langle\zeta|\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}\sqrt{2}\eta_2\ |\eta\rangle\langle\eta| \\ &= \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\left[-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\zeta_1}-(\mu_1-\mu_2)\zeta_2\right]\langle\zeta|,\end{aligned} \tag{5.79}$$

$$\begin{aligned}\langle\zeta|\ (\hat{X}_1-\hat{X}_2) &= \langle\zeta|\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}\sqrt{2}\eta_1\ |\eta\rangle\langle\eta| \\ &= \sqrt{\frac{2}{\lambda}}\left[\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\zeta_2}+(\mu_1-\mu_2)\zeta_1\right]\langle\zeta|.\end{aligned} \tag{5.80}$$

将式(5.80)代入式(5.76)，则有

$$\begin{aligned}&\left\{F\left[\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_2}-\mathrm{i}(\mu_1-\mu_2)\zeta_1\right)\right]+\left(\frac{1}{2M}+\kappa\mu_1\mu_2\right)p^2+\right.\\ &\left.\kappa(\mu_2-\mu_1)\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\zeta_2 p+\left(\frac{1}{2\mu}-\kappa\right)\frac{\lambda}{2}\zeta_2^2-E_n\right\}\langle\zeta|p,E_n\rangle = 0.\end{aligned} \tag{5.81}$$

另一方面，将式(5.79)代入式(5.77)，有

$$\left\{-\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\left[\frac{\partial}{\partial\zeta_1}-\mathrm{i}(\mu_1-\mu_2)\zeta_2\right]-p\right\}\langle\zeta|p,E_n\rangle = 0. \tag{5.82}$$

设波函数$\langle\zeta|p,E_n\rangle$具有以下形式的解：

$$\langle\zeta|p,E_n\rangle = \Psi_n\exp[\mathrm{i}(\mu_1-\mu_2)\zeta_1\zeta_2], \tag{5.83}$$

将式(5.83)代入方程式(5.81)给出

$$\left\{ \mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\lambda}}F\frac{\partial}{\partial\zeta_2}+\left(\frac{1}{2\mu}-\kappa\right)\frac{\lambda}{2}(\zeta_2-\zeta_0)^2+T-E_n\right\}\Psi_n=0,$$

(5.84)

其中：

$$\zeta_0=\frac{\sqrt{2}\mu\kappa(\mu_1-\mu_2)p}{(1-2\mu\kappa)\sqrt{\lambda}}, \tag{5.85}$$

$$T=\left(\frac{1}{2M}+\kappa\mu_1\mu_2\right)p^2-\left(\frac{1}{2\mu}-\kappa\right)\frac{\lambda}{2}\zeta_0^2=\frac{1-\mu M\kappa^2}{1-2\mu\kappa}\frac{p^2}{2M}.$$

(5.86)

把式(5.83) 代入式(5.82) 又给出

$$\left(-\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\frac{\partial}{\partial\zeta_1}-p\right)\Psi_n=0. \tag{5.87}$$

可见波函数 $\Psi_n$ 的解为

$$\Psi_n=\exp\left(\mathrm{i}\sqrt{\frac{\lambda}{2}}p\zeta_1\right)\chi_n, \tag{5.88}$$

式中：$\chi_n$ 与 $\zeta_1$ 无关. 将上式代入式(5.84)，得到关于 $\chi_n$ 的微分方程

$$\left\{ \mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\lambda}}F\frac{\partial}{\partial\zeta_2}+\frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{2\mu}-\kappa\right)(\zeta_2-\zeta_0)^2+T-E_n\right\}\chi_n(\zeta_2)=0,$$

(5.89)

求得 $\chi_n$ 的解是

$$\chi_n(\xi_2)=C\exp\left\{\mathrm{i}\frac{1}{F}\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\left[\frac{\lambda}{6}\left(\frac{1}{2\mu}-\kappa\right)(\zeta_2-\xi_0)^3+\right.\right.$$

$$\left.\left.(T-E_n)(\zeta_2-\xi_0)\right]\right\}, \tag{5.90}$$

式中：$C$ 为归一化系数.

### 5.3.2 在 $\langle\eta|$ 表象中求解 $\hat{H}$ 的能量本征波函数与能级

本节，回到纠缠态 $\langle\eta|$ 表象中，利用式(5.78) 和式(5.75)，在式(5.83)，式(5.88) 和式(5.90) 中的波函数 $\langle\zeta|p,E_n\rangle$ 变成为 $\langle\eta|p,E_n\rangle$，即

$$
\begin{aligned}
&\langle\eta| p, E_n\rangle \\
&= \langle\eta| \int \frac{d^2\zeta}{\pi} |\zeta\rangle\langle\zeta| p, E_n\rangle \\
&= C\sqrt{\frac{\lambda}{4}}\int \frac{d^2\zeta}{\pi}\exp\{i[(\mu_1-\mu_2)\eta_1\eta_2+\sqrt{\lambda}(\eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1)+ \\
&\quad \sqrt{\frac{\lambda}{2}}p\zeta_1]\}\cdot \exp\left\{i\frac{1}{F}\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\left[\frac{\lambda}{6}\left(\frac{1}{2\mu}-\kappa\right)(\zeta_2-\xi_0)^3+\right.\right. \\
&\quad \left.\left.(T-E_n)(\zeta_2-\zeta_0)\right]\right\} \\
&= C\sqrt{\frac{\lambda}{4}}e^{i\eta_1[(\mu_1-\mu_2)\eta_2+\sqrt{\lambda}\zeta_0]}\int\frac{d\zeta_1 d\zeta_2}{\pi}\exp\left\{i\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}p-\sqrt{\lambda}\eta_2\right)\zeta_1\right\}\cdot \\
&\quad \exp\left\{i\frac{1}{F}\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\left[\frac{\lambda}{6}\left(\frac{1}{2\mu}-\kappa\right)(\zeta_2-\zeta_0)^3+\right.\right. \\
&\quad \left.\left.(T-E_n+\sqrt{2}F\eta_1)(\zeta_2-\zeta_0)\right]\right\} \\
&= C\sqrt{\frac{8\pi}{\lambda}}\left[\frac{1}{F}\left(\frac{1}{2\mu}-\kappa\right)\right]^{-1/3}\delta\left(\sqrt{\frac{1}{2}}p-\eta_2\right)e^{i\eta_1[(\mu_1-\mu_2)\eta_2+\sqrt{\lambda}\zeta_0]}\cdot \\
&\quad \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\sqrt{\pi}}\cos\left[\frac{\alpha^3}{3}+\varepsilon\alpha\right],
\end{aligned}
\tag{5.91}
$$

其中:$\delta$ 函数的出现与式(5.2) 的本征值方程的以及总动量由式(5.68) 给出这两件事相自洽,

$$
\alpha = \left[\frac{1}{F}\left(\frac{1}{2\mu}-\kappa\right)\right]^{1/3}\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(\zeta_2-\zeta_0), \tag{5.92}
$$

$$
\varepsilon = F^{-2/3}\left(\frac{1}{2\mu}-\kappa\right)^{-1/3}(T-E_n+\sqrt{2}F\eta_1) = \frac{\eta_1}{l}-g, \tag{5.93}
$$

$$
l = \sqrt{\frac{1}{2}}F^{-1/3}\left(\frac{1}{2\mu}-\kappa\right)^{1/3}, \tag{5.94}
$$

$$
g = F^{-2/3}\left(\frac{1}{2\mu}-\kappa\right)^{-1/3}(E_n-T) = 2\left(\frac{1}{2\mu}-\kappa\right)^{-1}(E_n-T)l^2, \tag{5.95}
$$

然而$\int_0^\infty \frac{d\alpha}{\sqrt{\pi}}\cos\left[\frac{\alpha^3}{3}+\varepsilon\alpha\right]$其结果为 Airy 函数. 当$\varepsilon>0$,Airy 函数表现为修正的 Bessel(贝塞尔) 函数,即

$$\langle\eta|p,E_n\rangle = C(8\varepsilon\pi)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left[\frac{1}{F}\left(\frac{1}{2\mu}-\kappa\right)\right]^{-1/3}\delta\left(\sqrt{\frac{1}{2}}p-\eta_2\right)\cdot$$

$$e^{i\eta_1[(\mu_1-\mu_2)\eta_2+\sqrt{\lambda}\zeta_0]}K_{1/3}\left(\frac{2}{3}\varepsilon^{3/2}\right)$$

$$\xrightarrow{\varepsilon\to\infty} C\pi\left(\frac{6}{\varepsilon^{1/2}}\right)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left[\frac{1}{F}\left(\frac{1}{2\mu}-\kappa\right)\right]^{-1/3}e^{i\eta_1[(\mu_1-\mu_2)\eta_2+\sqrt{\lambda}\zeta_0]}\cdot$$

$$\delta\left(\sqrt{\frac{1}{2}}p-\eta_2\right)\exp\left(-\frac{2}{3}\varepsilon^{3/2}\right). \tag{5.96}$$

当$\varepsilon<0$,Airy 函数表现为第一类 Bessel 函数,即

$$\langle\eta|p,E_n\rangle = C\left(\frac{8|\varepsilon|\pi}{\lambda}\right)^{1/2}\left[\frac{1}{F}\left(\frac{1}{2\mu}-\kappa\right)\right]^{-1/3}e^{i\eta_1[(\mu_1-\mu_2)\eta_2+\sqrt{\lambda}\zeta_0]}\cdot$$

$$\delta\left(\sqrt{\frac{1}{2}}p-\eta_2\right)\left[J_{1/3}\left(\frac{2}{3}|\varepsilon|^{3/2}\right)+J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}|\varepsilon|^{3/2}\right)\right]. \tag{5.97}$$

因为粒子的运动受到$\hat{X}_2-\hat{X}_1\geqslant 0$的限制,能量的量子化由方程$\langle\eta=0|p,E_n\rangle=0$决定,也就是$E_n$由下列方程决定:

$$\left[J_{1/3}\left(\frac{2}{3}g^{3/2}\right)+J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}g^{3/2}\right)\right]=0, \tag{5.98}$$

它的解由 Bessel 函数的表格得到,能够列出

$$g = 2.3381,\quad 4.0880,\quad 5.5206,\quad 6.7867,\quad 7.9441,\cdots; \tag{5.99}$$

因此,从式(5.95)就知道基态的能量

$$E_1 = (2.3381)F^{2/3}\left(\frac{1}{2\mu}-\kappa\right)^{1/3}+T. \tag{5.100}$$

再利用式(5.86)并恢复 Planck(普朗克) 常数$\hbar$,有

$$E_1 = (2.3381)\left[\hbar^2F^2\left(\frac{1-2\mu\kappa}{2\mu}\right)\right]^{1/3}+\frac{1-\mu M\kappa^2}{1-2\mu\kappa}\frac{p^2}{2M}. \tag{5.101}$$

以上讨论表明，纠缠态表象提供了一个解两体耦合动力学的新框架，它能很自然地把动力学化为单变数的微分方程，而另一个变数则以参量的面目出现在方程中，另外运动耦合项自然地包含在质心运动的能量中.

## 5.4 量子谐振子的二维高斯微扰

高斯微扰(Gaussian perturbation) 的模式在一些研究领域里被广泛使用，如探讨天体物理学的大尺度结构，求解数学中的演化方程等. 在本节中，采用 IWOP 技术与纠缠态表象的方法，推导两模的情况下受高斯微扰的 Fock 态矩阵元的精确表达式，其结果与超几何函数有关[85].

考虑一两维谐振子受到 $\varepsilon e^{\lambda(\hat{X}_1-\hat{X}_2)^2}$ $(\lambda<0)$ 的高斯微扰，即总哈密顿量算符为

$$\hat{H}_2=(a_1^\dagger a_1+a_2^\dagger a_2+1)+\varepsilon e^{\lambda(\hat{X}_1-\hat{X}_2)^2}. \tag{5.102}$$

为了导出高斯微扰 $e^{\lambda(\hat{X}_1-\hat{X}_2)^2}$ 在两模 Fock 态中的矩阵元，借助两体纠缠态表象 $\langle\eta|$. 利用两模相干态的超完备性以及式(5.1)，有

$$\begin{aligned}\langle n,m|\eta\rangle &= \int\frac{d^2z_1 d^2z_2}{\pi^2}\langle n,m|z_1z_2\rangle\langle z_1z_2|\,e^{-\frac{|\eta|^2}{2}+\eta a_1^\dagger-\eta^* a_2^\dagger+a_1^\dagger a_2^\dagger}\,|00\rangle\\ &=(n!m!)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{|\eta|^2}{2}}\int\frac{d^2z_2}{\pi}e^{-|z_2|^2-\eta^* z_2^*}(\eta+z_2^*)^n z_2^m\\ &=\frac{(-1)^m e^{-\frac{|\eta|^2}{2}}}{\sqrt{m!n!}}H_{n,m}(\eta,\eta^*),\end{aligned} \tag{5.103}$$

其中已用积分公式

$$\int\frac{d^2z}{\pi}z^k z^{*n}e^{\lambda|z|^2+bz}=(-1)^{n+1}\lambda^{-(n+1)}\frac{n!}{(n-k)!}b^{n-k}\,(\mathrm{Re}\,\lambda<0,k\leqslant n), \tag{5.104}$$

$$\int \frac{d^2 z}{\pi} z^{*n} e^{\lambda|z|^2+bz} = (-1)^{n+1}\lambda^{-(n+1)} b^n \quad (\mathrm{Re}\,\lambda < 0),$$

(5.105)

$H_{n,m}(\eta,\eta^*)$ 是双变量 Hermite 多项式

$$H_{n,m}(\eta,\eta^*) = \sum_{l=0}^{\min[n,m]} \frac{m!n!(-1)^l}{l!(n-l)!(m-l)!}\eta^{n-l}\eta^{*m-l}$$

$$\exp(-tt' + t\eta + t'\eta^*) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{t^n t'^m}{n!m!} H_{n,m}(\eta,\eta^*).$$

(5.106)

根据式(5.2),式(5.3) 与式(5.103) 以及式(5.106),就有

$$\begin{aligned}
&\langle n',m'|\, e^{\lambda(\hat{X}_1-\hat{X}_2)^2}\, |n,m\rangle \\
&= \int \frac{d^2\eta}{\pi} e^{2\lambda\eta_1^2} \langle n',m'|\eta\rangle\langle\eta|m,n\rangle \\
&= \frac{(-1)^{m'+m}}{\sqrt{m'!n'!m!n!}} \int \frac{d^2\eta}{\pi} e^{2\lambda\eta_1^2} e^{-|\eta|^2} H_{n',m'}(\eta,\eta^*) H_{m,n}(\eta,\eta^*) \\
&= \sum_{s=0}^{\min[n',m']}\sum_{k=0}^{\min[n,m]} \frac{(-1)^{m'-s+m-k}\sqrt{m'!n'!m!n!}}{s!(n'-s)!(m'-s)!k!(m-k)!(m-k)!} \cdot \\
&\quad \int \frac{d^2\eta}{\pi} e^{2\lambda\eta_1^2} \eta^{n'-s+m-k}(\eta^*)^{m'-s+n-k} e^{-|\eta|^2}.
\end{aligned} \tag{5.107}$$

再根据

$$\int \frac{d^2 z}{\pi} z^k z^{*n} e^{\lambda|z|^2} = (-1)^{k+1}\lambda^{-(k+1)} k!\delta_{nk}, \tag{5.108}$$

就能导出

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d^2\eta}{\pi} e^{2\lambda\eta_1^2} \eta^{n'-s+m-k}(\eta^*)^{m'-s+n-k} e^{-|\eta|^2} \\
&= \int \frac{d^2\eta}{\pi} e^{\frac{\lambda}{2}(\eta^2+\eta^{*2})} \eta^{n'-s+m-k}(\eta^*)^{m'-s+n-k} e^{-(1-\lambda)|\eta|^2} \\
&= \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{n'-m'+m-n}{2}}}{(1-\lambda)^{n'+m-s-k+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2l}(n'+m-s-k+2l)!}{[2(1-\lambda)]^{2l} l!\left(l+\frac{n'-m'+m-n}{2}\right)!}
\end{aligned}$$

$$= A(s,k)\,{}_2F_1[b,c;d;\lambda^2/(1-\lambda)^2], \tag{5.109}$$

式中：

$$b = \frac{1}{2} + \frac{n' + m - s - k}{2}, \quad c = 1 + \frac{n' + m - s - k}{2},$$

$$d = 1 + \frac{n' - m' + m - n}{2}, \quad A(s,k) = \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{d-1}(2b-1)!}{(1-\lambda)^{2b}\Gamma(\mathrm{d})}. \tag{5.110}$$

${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)$ 是广义的 Hypergeometric 函数(超几何函数)：

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+\gamma)} \frac{z^n}{n!}, \tag{5.111}$$

要求 $|z| < 1$.

将式(5.109) 代入式(5.107)，得到矩阵元

$$\begin{aligned} H'_{m'n',mn} &= \langle n',m' |\, \mathrm{e}^{-\lambda(\hat{X}_1-\hat{X}_2)^2} \,| m,n\rangle \\ &= B \sum_{s=0}^{\min[n',m']} \sum_{k=0}^{\min[n,m]} \frac{[-(1-\lambda)]^{s+k}(n'+m-s-k)!}{s!(n'-s)!(m'-s)!k!(n-k)!(m-k)!} \cdot \\ &\quad {}_2F_1[b,c;d;\lambda^2/(1-\lambda)^2], \end{aligned} \tag{5.112}$$

式中：$B = \dfrac{(-1)^{m+m'}\sqrt{m'!n'!m!n!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{d-1}}{(1-\lambda)^{n'+m+1}\Gamma(d)}$. 当 $m = m'$ 与 $n = n'$ 时，式(5.112) 就是能级的一级近似修正：

$$\begin{aligned} E^{(1)}_{m,n} &= \langle n,m |\, \mathrm{e}^{-\lambda(\hat{X}_1-\hat{X}_2)^2} \,| m,n\rangle \\ &= \sum_{s=0}^{\min[n,m]} \sum_{k=0}^{\min[n,m]} \frac{[-(1-\lambda)]^{s+k} m!n!(n'+m-s-k)!}{s!(n'-s)!(m'-s)!k!(n-k)!(m-k)!} \cdot \\ &\quad \frac{{}_2F_1[b',c';1;\lambda^2/(1-\lambda)^2]}{(1-\lambda)^{m+n+1}}, \end{aligned} \tag{5.113}$$

式 中：$b' = \dfrac{n+m-s-k+1}{2}$，$c' = \dfrac{n+m-s-k+2}{2}$ 以 及

$E^{(1)}_{m,n}=E^{(1)}_{n,m}$.

特别地，当取 $m'=m=0$ 时，式(5.112) 变为

$$\langle n',0|\,\mathrm{e}^{-\lambda(\hat{X}_1-\hat{X}_2)^2}\,|0,n\rangle$$

$$=\frac{\sqrt{n'!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{n'-n}{2}}}{\sqrt{n!}\,(1-\lambda)^{n'+1}\Gamma\left(1+\frac{n'-n}{2}\right)}\cdot$$

$$\;_2F_1\left[\frac{n'+1}{2},1+\frac{n'}{2};1+\frac{n'-n}{2};\frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2}\right],\quad(5.114)$$

再取 $n=n'=0$，则基态的矩阵元为

$$\langle 0,0|\,\mathrm{e}^{-\lambda(\hat{X}_1-\hat{X}_2)^2}\,|0,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}}.\qquad(5.115)$$

有趣地发现方程式(1.130) 与式(5.115) 之间具有相似性.

实际上，利用 $|\,\eta\rangle$ 的完备性可以得到式(5.115) 的结果，即

$$\mathrm{e}^{-\lambda(\hat{X}_1-\hat{X}_2)^2}\,|\,00\rangle=\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}\mathrm{e}^{-2\lambda\eta_1^2}\,|\,\eta\rangle\langle\eta\,|\,00\rangle$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}}\exp\left[\frac{\lambda(a_1^\dagger-a_2^\dagger)^2}{2(1-2\lambda)}\right]|\,00\rangle.$$

从上式就能得到基态的有关 $\lambda$ 的一级修正

$$|\,00\rangle+\frac{\lambda}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}\,|\,00\rangle+|\,20\rangle+|\,02\rangle-\sqrt{2}\,|\,11\rangle).$$

从式(5.112) 可得，波函数 $\Psi^{(0)}_{mn}$ 的一级近似修正和本征能量 $E^{(0)}_{mn}$ 的二级近似修正，即

$$\Psi^{(1)}_{mn}=\sum_{m'n'}{}'\frac{H'_{m'n'mn}}{E^{(0)}_{mn}-E^{(0)}_{m'n'}}\Psi^{(0)}_{m'n'},\quad E^{(2)}_{mn}=\sum_{m'n'}{}'\frac{|\,\varepsilon H'_{m'n',mn}\,|^2}{E^{(0)}_{mn}-E^{(0)}_{m'n'}},$$

(5.116)

其中：求和上标符号(′) 表示求和除了 $m=m'$ 和 $n'=n$ 项之外.

## 5.5 纠缠态表象求解复变量Fokker-Planck方程

传统上，求解密度主方程的途径主要通过 $P$ 表示，$Q$ 表示或者

Wigner 函数转换成 Fokker-Planck 方程($c$ 数方程),而真正解析解的 Fokker-Planck 方程为数不多. 一个典型的 Fokker-Planck 方程为[86],

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t)=\gamma\frac{\partial}{\partial x}[xP(x,t)]+\frac{\lambda}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}P(x,t), \quad (5.117)$$

其中:$x$ 为实变量. 由于微分算符 $-\left(\frac{\lambda}{4\gamma}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $-\frac{1}{4}-\left(\frac{x}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x}$, $\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)x^2$ 满足 $SU(1,1)$ 李代数, 所以可以用 $SU(1,1)$ 指数算符分解公式,能精确求出式(5.117) 的解. 如果将式(5.117) 推广到复变量$(\eta,\eta^*)$ 形式[87]

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\eta,\eta^*;t)=\gamma\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}[\eta P(\eta,\eta^*;t)]+\frac{\partial}{\partial\eta^*}[\eta^*P(\eta,\eta^*;t)]\right\}+\frac{\lambda}{2}\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\eta^*}P(\eta,\eta^*;t). \quad (5.118)$$

其中:$\gamma$ 是一正数,其对应于弛豫时间,而 $\lambda$ 表示扩散系数. 该方程的形式解为

$$\begin{aligned}P(\eta,\eta^*;t)&=\mathrm{e}^{2\gamma t}\exp\left[\gamma t\left(\eta\frac{\partial}{\partial\eta}+\eta^*\frac{\partial}{\partial\eta^*}\right)+\frac{\lambda t}{2}\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\eta^*}\right]P(\eta,\eta^*;0)\\&=\mathrm{e}^{2\gamma t}\exp\left[-2\gamma t\left(-\frac{\eta}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}-\frac{\eta^*}{2}\frac{\partial}{\partial\eta^*}-\frac{\lambda}{4\gamma}\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\eta^*}\right)\right]\cdot\\&\quad P(\eta,\eta^*;0), \end{aligned}\quad (5.119)$$

式中:$P(\eta,\eta^*;0)$ 表示初始时刻的状态($t=0$). 为了得到 $P(\eta,\eta^*;t)$ 的明显表达式,这里借助纠缠态表象 $|\eta\rangle$ 来分解式(5.119) 中指数算符. 注意到下列算符:

$$\begin{aligned}L_+&=\frac{1}{4}[(\hat{X}_1-\hat{X}_2)^2+(\hat{P}_1+\hat{P}_2)^2],\\L_-&=\frac{1}{4}[(\hat{X}_1+\hat{X}_2)^2+(\hat{P}_1-\hat{P}_2)^2],\\L_0&=-\frac{\mathrm{i}}{2}(\hat{X}_1\hat{P}_2+\hat{X}_2\hat{P}_1),\end{aligned}\quad (5.120)$$

具有 $SU(2)$ 李代数，即

$$[L_-,L_+] = 2L_0, \quad [L_0,L_\pm] = \pm L_\pm. \tag{5.121}$$

利用式(5.1)可以导出

$$\langle\eta|(\hat{X}_1+\hat{X}_2) = \mathrm{i}\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial\eta_2}\langle\eta|, \quad \langle\eta|(\hat{P}_1-\hat{P}_2) = -\mathrm{i}\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial\eta_1}\langle\eta|. \tag{5.122}$$

根据式(5.2)与式(5.120)，将算符 $L_+, L_-, L_0$ 分别作用到 $|\eta\rangle$，得到

$$\begin{aligned}
\langle\eta|L_+ &= \frac{|\eta|^2}{2}\langle\eta|,\\
\langle\eta|L_- &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta_2^2}\right)\langle\eta|,\\
\langle\eta|L_0 &= \left(-\eta_2\frac{\partial}{\partial\eta_2}-\eta_1\frac{\partial}{\partial\eta_1}+\frac{1}{2}\right)\langle\eta|.
\end{aligned} \tag{5.123}$$

由于 $\eta = \eta_1 + \mathrm{i}\eta_2$，以及

$$\frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\eta_1}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\eta_2}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\eta^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\eta_1}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\eta_2}\right), \tag{5.124}$$

有

$$\frac{\partial^2}{\partial\eta_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta_2^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\eta^*}, \quad \eta_1\frac{\partial}{\partial\eta_1}+\eta_2\frac{\partial}{\partial\eta_2} = \eta\frac{\partial}{\partial\eta}+\eta^*\frac{\partial}{\partial\eta^*}, \tag{5.125}$$

可以看出微分算符 $\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\eta^*}$，$\left(\eta\frac{\partial}{\partial\eta}+\eta^*\frac{\partial}{\partial\eta^*}\right)$，$|\eta|^2$ 满足 $SU(2)$ 李代数. 因此，很容易看出式(5.119)中微分算符 $\left(\frac{\eta}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{\eta^*}{2}\frac{\partial}{\partial\eta^*}\right)$ 与 $\frac{\lambda}{4\gamma}\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\eta^*}$ 也满足 $SU(2)$ 李代数，即

$$\left[\frac{\lambda}{4\gamma}\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\eta^*}, \frac{\eta}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{\eta^*}{2}\frac{\partial}{\partial\eta^*}\right] = \frac{\lambda}{4\gamma}\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\eta^*}. \tag{5.126}$$

再利用算符公式

$$\mathrm{e}^{\theta(\hat{A}+\hat{B})} = \mathrm{e}^{\theta\hat{B}}\mathrm{e}^{(1-\mathrm{e}^{-\theta})\hat{A}} = \mathrm{e}^{(\mathrm{e}^{\theta}-1)\hat{A}}\mathrm{e}^{\theta\hat{B}}, \tag{5.127}$$

式中：$[\hat{A},\hat{B}]=-\hat{A}$，$\theta$ 是一参数，就能分解式(5.119)中的指数算符

$$P(\eta,\eta^*;t)=e^{2\gamma t}\exp\left[\gamma t\left(\eta\frac{\partial}{\partial\eta}+\eta^*\frac{\partial}{\partial\eta^*}\right)\right]\cdot \exp\left[\frac{\lambda}{4\gamma}(e^{2\gamma t}-1)\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\eta^*}\right]P(\eta,\eta^*;0). \tag{5.128}$$

由于

$$P(\eta,\eta^*;0)=\int d^2\eta_0 P(\eta_0,\eta_0^*;0)\delta^{(2)}(\eta-\eta_0), \tag{5.129}$$

式中：两维 $\delta$ 函数的形式

$$\delta^{(2)}(\eta-\eta_0)=\int\frac{d^2\beta}{\pi^2}e^{-i\beta(\eta^*-\eta_0^*)-i\beta^*(\eta-\eta_0)}, \tag{5.130}$$

导出 Green 函数

$$\begin{aligned}G(\eta,\eta^*;t\mid\eta_0,\eta_0^*;0)&\equiv e^{2\gamma t}\exp\left[\gamma t\left(\eta\frac{\partial}{\partial\eta}+\eta^*\frac{\partial}{\partial\eta^*}\right)\right]\exp\left[\frac{\lambda}{4\gamma}[e^{2\gamma t}-1]\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\eta^*}\right]\cdot\delta^{(2)}(\eta-\eta_0)\\&=e^{2\gamma t}\exp\left[\gamma t\left(\eta\frac{\partial}{\partial\eta}+\eta^*\frac{\partial}{\partial\eta^*}\right)\right]\int\frac{d^2\beta}{\pi^2}e^{-i\beta(\eta^*-\eta_0^*)-i\beta^*(\eta-\eta_0)}\cdot\exp\left[-|\beta|^2\frac{\lambda(e^{2\gamma t}-1)}{4\gamma}\right],\end{aligned} \tag{5.131}$$

其中：对于 $\lambda>0$，有

$$\int\frac{d^2\beta}{\pi^2}\exp\left[-i\beta(\eta^*-\eta_0^*)-i\beta^*(\eta-\eta_0)-|\beta|^2\frac{\lambda}{4\gamma}(e^{2\gamma t}-1)\right]=\frac{4\gamma}{\pi\lambda(e^{2\gamma t}-1)}\exp\left[\frac{-\gamma|\eta-\eta_0|^2}{\lambda(e^{2\gamma t}-1)}\right]. \tag{5.132}$$

将式(5.131)代入式(5.132)便得到

$$G(\eta,\eta^*;t\mid\eta_0,\eta_0^*;0)=\frac{4\gamma}{\pi\lambda(1-\mathrm{e}^{-2\gamma t})}\exp\left[\frac{-\gamma\mid\mathrm{e}^{\gamma t}\eta-\eta_0\mid^2}{\lambda(\mathrm{e}^{2\gamma t}-1)}\right].\tag{5.133}$$

最终,得到

$$P(\eta,\eta^*;t)=\frac{4\gamma}{\pi\lambda[1-\mathrm{e}^{-2\gamma t}]}\int\exp\left(\frac{-\gamma\mid\mathrm{e}^{\gamma t}\eta-\eta_0\mid^2}{\lambda[\mathrm{e}^{2\gamma t}-1]}\right)\cdot P(\eta_0,\eta_0^*;0)\mathrm{d}^2\eta_0,\tag{5.134}$$

这就是式(5.118)中复变量 $F-P$ 方程的解.

现在考虑一个更复杂的复变量 $F-P$ 方程

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\eta,\eta^*;t)=\gamma\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}[\eta P(\eta,\eta^*;t)]+\frac{\partial}{\partial\eta^*}[\eta^*P(\eta,\eta^*;t)]\right\}+\lambda\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\eta^*}P(\eta,\eta^*;t)+\frac{\lambda}{2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}P(\eta,\eta^*;t)+\frac{\lambda}{2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^{*2}}P(\eta,\eta^*;t).\tag{5.135}$$

它的形式解为

$$\begin{aligned}P(\eta,\eta^*;t)&=\mathrm{e}^{2\gamma t}\exp\left[\gamma t\left(\eta\frac{\partial}{\partial\eta}+\eta^*\frac{\partial}{\partial\eta^*}\right)+\frac{\lambda t}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^{*2}}+2\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\eta^*}\right)\right]\cdot P(\eta,\eta^*;0)\\&\equiv\mathrm{e}^{2\gamma t}\exp[-2\gamma t(B+\Gamma+\Lambda)]P(\eta,\eta^*;0),\end{aligned}\tag{5.136}$$

式中:

$$B=-\frac{\eta}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}-\frac{\eta^*}{2}\frac{\partial}{\partial\eta^*},\Gamma=-\frac{\lambda}{4\gamma}\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^{*2}}\right),\quad\Lambda=-\frac{\lambda}{2\gamma}\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\eta^*}.\tag{5.137}$$

从式(5.137),可以发现满足下列对易关系:

$$[\Gamma,B]=-\Gamma,\quad[\Lambda,B]=-\Lambda,\quad[(\Gamma+\Lambda),B]=-(\Gamma+\Lambda).\tag{5.138}$$

因此，利用式(5.127)，则有

$$P(\eta,\eta^*;t) = e^{2\gamma t}\exp\left[\gamma t\left(\eta\frac{\partial}{\partial\eta}+\eta^*\ \frac{\partial}{\partial\eta^*}\right)\right]\cdot$$

$$\exp\left[\frac{\lambda}{4\gamma}(e^{2\gamma t}-1)\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^{*2}}+2\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\eta^*}\right)\right]P(\eta,\eta^*;0). \tag{5.139}$$

相应的 Green 函数为

$$\begin{aligned}
&G(\eta,\eta^*;t\mid\eta_0,\eta_0^*;0)\\
&= e^{2\gamma t}\exp\left[\gamma t\left(\eta\frac{\partial}{\partial\eta}+\eta^*\ \frac{\partial}{\partial\eta^*}\right)\right]\cdot\\
&\quad\exp\left[\frac{\lambda}{4\gamma}(e^{2\gamma t}-1)\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^{*2}}+2\frac{\partial^2}{\partial\eta\partial\eta^*}\right)\right]\delta^{(2)}(\eta-\eta_0)\\
&= e^{2\gamma t}\exp\left[\gamma t\left(\eta\frac{\partial}{\partial\eta}+\eta^*\ \frac{\partial}{\partial\eta^*}\right)\right]\\
&\quad\int\frac{d^2\beta}{\pi^2}\exp[-i\beta(\eta^*-\eta_0^*)-i\beta^*(\eta-\eta_0)-\\
&\quad\frac{\lambda}{4\gamma}(e^{2\gamma t}-1)(2\mid\beta\mid^2+\beta^2+\beta^{*2})],
\end{aligned} \tag{5.140}$$

式中：

$$\begin{aligned}
&\int\frac{d^2\beta}{\pi^2}\exp\Big[-i\beta(\eta^*-\eta_0^*)-i\beta^*(\eta-\eta_0)-\frac{\lambda}{4\gamma}(e^{2\gamma t}-1)\\
&\quad(2\mid\beta\mid^2+\beta^2+\beta^{*2})\Big]\\
&=\int\frac{d\beta_1}{\pi}\exp\left[-\beta_1^2\frac{\lambda}{\gamma}(e^{2\gamma t}-1)-i\beta_1\mathrm{Re}(\eta-\eta_0)\right]\int\frac{d\beta_2}{\pi}e^{-i\beta_2\mathrm{Im}(\eta-\eta_0)}\\
&=\sqrt{\frac{\gamma}{\pi\lambda(e^{2\gamma t}-1)}}\exp\left\{\frac{-\gamma[\mathrm{Re}(\eta-\eta_0)]^2}{4\lambda(e^{2\gamma t}-1)}\right\}\delta(\mathrm{Im}(\eta-\eta_0)),
\end{aligned} \tag{5.141}$$

所以

$$
\begin{aligned}
&G(\eta,\eta^*;t \mid \eta_0,\eta_0^*;0) \\
&= \sqrt{\frac{\gamma e^{4\gamma t}}{\pi\lambda(e^{2\gamma t}-1)}}\exp\left[\gamma t\left(\eta\frac{\partial}{\partial\eta}+\eta^*\frac{\partial}{\partial\eta^*}\right)\right]\cdot \\
&\quad \exp\left\{\frac{-\gamma[\mathrm{Re}(\eta-\eta_0)]^2}{4\lambda(e^{2\gamma t}-1)}\right\}\delta(\mathrm{Im}(\eta-\eta_0)) \\
&= \sqrt{\frac{\gamma e^{4\gamma t}}{\pi\lambda(e^{2\gamma t}-1)}}\exp\left[\frac{-\gamma(\mathrm{Re}(e^{\gamma t}\eta-\eta_0))^2}{4\lambda(e^{2\gamma t}-1)}\right]\delta(\mathrm{Im}(e^{\gamma t}\eta-\eta_0)).
\end{aligned} \tag{5.142}
$$

最后得到式(5.135)的解

$$
\begin{aligned}
P(\eta,\eta^*;t) = {}& \sqrt{\frac{\gamma e^{4\gamma t}}{\pi\lambda(e^{2\gamma t}-1)}}\int\exp\left\{\frac{-\gamma[\mathrm{Re}(e^{\gamma t}\eta-\eta_0)]^2}{4\lambda(e^{2\gamma t}-1)}\right\}\cdot \\
&\delta(\mathrm{Im}(e^{\gamma t}\eta-\eta_0))P(\eta_0,\eta_0^*;0)\mathrm{d}^2\eta_0.
\end{aligned} \tag{5.143}
$$

从上面分析看出,借助纠缠态表象$\langle\eta|$很容易计算出 $F-P$ 方程的形式解中微分算符的对易关系,这有利于分解其中指数算符以便得到解的具体形式.

# 第6章　量子相空间中的新积分变换

在数学物理领域，常用的是傅里叶变换[88,89]、拉普拉斯变换[90,91]和汉克尔变换[92,93]等，本章将介绍范洪义所提出的一种新的量子相空间积分变换[94]，简称为范氏变换. 它有良好的变换特性，例如可逆保迹性[95]，利用该变换可以导出分数傅里叶变换核[96]. 此外，我们将范氏变换推广到纠缠态表象[97]，研究其相关性质，以及 Weyl 编序与一些非对易算符编序之间的关系，并用它来导出复分数傅里叶变换核[98]. 这些新变换不仅丰富与发展了变换理论，而且丰富了量子相空间理论.

## 6.1　量子力学中范氏变换的出现

本节介绍范氏变换是如何在量子力学中自然出现的. 在第2章中，我们知道 Wigner 算符的 Weyl 编序形式为

$$\Delta(x,p) = \vdots\, \delta(x-\hat{X})\delta(p-\hat{P})\, \vdots = \vdots\, \delta(p-\hat{P})\delta(x-\hat{X})\, \vdots, \tag{6.1}$$

那么，$\delta(p-\hat{P})\delta(x-\hat{X})$ 与 $\delta(x-\hat{X})\delta(p-\hat{P})$ 的 Weyl 编序形式分别是什么呢？为此，利用坐标本征态 $|x\rangle$ 与动量本征态 $|p\rangle$ 的完备性以及 $\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}$，能得到

$$\begin{aligned}
&\delta(p-\hat{P})\delta(x-\hat{X}) \\
&= \int \mathrm{d}p'\ |p'\rangle\langle p'|\ \delta(p-\hat{P})\delta(x-\hat{X})\int \mathrm{d}x'\ |x'\rangle\langle x'| \\
&= \int \frac{\mathrm{d}p'}{\sqrt{2\pi}}\ |p'\rangle\int \mathrm{d}x'\langle x'|\ \delta(p-p')\delta(x-x')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'x'}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |p\rangle\langle x| e^{-ipx}. \tag{6.2}$$

根据式(1.75)和式(1.76)，得到 $|x\rangle$，$|p\rangle$ 与相干态 $|\beta\rangle$ 的内积分别为

$$\langle x|\beta\rangle = \pi^{-1/4}\exp\left(-\frac{x^2}{2}+\sqrt{2}x\beta-\frac{1}{2}\beta^2-\frac{1}{2}|\beta|^2\right), \tag{6.3}$$

$$\langle -\beta|p\rangle = \pi^{-1/4}\exp\left(-\frac{p^2}{2}-i\sqrt{2}p\beta^* +\frac{1}{2}\beta^{*2}-\frac{1}{2}|\beta|^2\right). \tag{6.4}$$

将式(6.2)代入式(2.76)并用式(6.3)与式(6.4)，则有

$$\begin{aligned}
&\delta(p-\hat{P})\delta(x-\hat{X}) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int\frac{d^2\beta}{\pi}\vdots\langle -\beta|p\rangle\langle x| e^{-ipx} |\beta\rangle e^{2(\beta^* a-a^\dagger\beta+a^\dagger a)}\vdots \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\pi}e^{-\frac{x^2+p^2}{2}-ipx}\int\frac{d^2\beta}{\pi}\vdots\exp\Big[-|\beta|^2+\sqrt{2}x\beta-\sqrt{2}ip\beta^* + \\
&\quad 2(\beta^* a-a^\dagger\beta+a^\dagger a)-\frac{\beta^2}{2}+\frac{\beta^{*2}}{2}\Big]\vdots \\
&= \frac{1}{\pi}\vdots\exp[\sqrt{2}x(a-a^\dagger)+\sqrt{2}ip(a+a^\dagger)-2ipx+a^{\dagger 2}- \\
&\quad a^2-a^\dagger a]\vdots \\
&= \frac{1}{\pi}\vdots\exp[-2i(x-\hat{X})(p-\hat{P})]\vdots,
\end{aligned} \tag{6.5}$$

这里已考虑 $\hat{X}=\frac{1}{\sqrt{2}}(a+a^\dagger)$，$\hat{P}=\frac{1}{i\sqrt{2}}(a-a^\dagger)$，并用了积分公式

$$\begin{aligned}
&\int\frac{d^2z}{\pi}\exp(\zeta|z|^2+\xi z+\eta z^*+fz^2+gz^{*2}) \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{\zeta^2-4fg}}\exp\left[\frac{-\zeta\xi\eta+\xi^2 g+\eta^2 f}{\zeta^2-4fg}\right],
\end{aligned} \tag{6.6}$$

其要求 $\mathrm{Re}(\zeta+f+g)<0$，$\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta^2-4fg}{\zeta+f+g}\right)<0$，或者 $\mathrm{Re}(\zeta-f-$

$g) < 0, \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta^2 - 4fg}{\zeta - f - g}\right) < 0$.类似地,也可导出

$$\begin{aligned}
&\delta(x-\hat{X})\delta(p-\hat{P}) \\
&= 2\int \frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi} \vdots \langle -\beta|x\rangle\langle p|\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\ |\beta\rangle \mathrm{e}^{2(\beta^* a - a^\dagger\beta + a^\dagger a)} \vdots \\
&= \frac{1}{\pi} \vdots \exp[2\mathrm{i}(x-\hat{X})(p-\hat{P})] \vdots .
\end{aligned} \tag{6.7}$$

从式(6.5)与式(6.7)看出 $\delta(p-\hat{P})\delta(x-\hat{X}) \neq \delta(x-\hat{X})\delta(p-\hat{P})$,这是因为 $\hat{X}$ 与 $\hat{P}$ 不对易的.对于式(6.5)与式(6.7)的导出也可用另一种方法,见文献[95].

根据 $\delta$ 函数的性质与式(6.1),就有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi} \vdots \exp[-2\mathrm{i}(x-\hat{X})(p-\hat{P})] \vdots \\
&= \frac{1}{\pi}\int \mathrm{d}p'\mathrm{d}x' \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(x-x')(p-p')} \vdots \delta(x'-\hat{X})\delta(p'-\hat{P}) \vdots \\
&= \frac{1}{\pi}\int \mathrm{d}p'\mathrm{d}x' \Delta(x',p') \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(p-p')(x-x')} .
\end{aligned} \tag{6.8}$$

于是,从式(6.8)和式(6.5)导出

$$\frac{1}{\pi}\int \mathrm{d}p'\mathrm{d}x' \Delta(x',p') \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(p-p')(x-x')} = \delta(p-\hat{P})\delta(x-\hat{X}). \tag{6.9}$$

同样地,由式(6.7)也可导出

$$\frac{1}{\pi}\int \mathrm{d}p'\mathrm{d}x' \Delta(x',p') \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p-p')(x-x')} = \delta(x-\hat{X})\delta(p-\hat{P}). \tag{6.10}$$

所以根据 Weyl 对应规则,$\mathrm{e}^{\pm 2\mathrm{i}(p-p')(q-q')}/\pi$ 可分别看成 $\delta(x-\hat{X})\delta(p-\hat{P})$ 与 $\delta(p-\hat{P})\delta(x-\hat{X})$ 的经典对应.另外,相对式(6.8)的逆变换为

$$\int \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}p}{\pi} \vdots \exp[-2\mathrm{i}(x-\hat{X})(p-\hat{P})] \vdots \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p-p')(x-x')}$$

$$= \int \frac{dxdp}{\pi}\int dp''dx''\Delta(x'',p'')e^{-2i(p-p'')(x-x'')+2i(p-p')(x-x')}$$

$$= \int dp''dx''\Delta(x'',p'')e^{-2i(p''x''-p'x')}\delta(x'-x'')\delta(p'-p'')$$

$$= \Delta(x',p'), \tag{6.11}$$

这就说明下面等式成立：

$$\int dxdp\delta(p-\hat{P})\delta(x-\hat{X})e^{2i(p-p')(x-x')} = \Delta(x',p'), \tag{6.12}$$

或者

$$\int dxdp\delta(x-\hat{X})(p-\hat{P})e^{-2i(p-p')(x-x')} = \Delta(x',p'). \tag{6.13}$$

所以，式(6.9) ～ 式(6.13) 在 $x-p$ 相空间中是 Wigner 算符的新变换形式，简称范氏变换.

如果在式(6.11) 两边同时左乘$\int dx'dp'f(p',x')$，得到

$$\int dx'dp'f(p',x')\Delta(x',p')$$

$$= \int dx'dp'f(p',x')\int \frac{dxdp}{\pi}e^{2i(p-p')(x-x')} \vdots \exp[-2i(x-\hat{X})(p-\hat{P})] \vdots$$

$$= \int \frac{dxdp}{\pi} \vdots e^{-2i(x-\hat{X})(p-\hat{P})} \vdots G(p,x), \tag{6.14}$$

令

$$G(p,x) \equiv \int \frac{dx'dp'}{\pi}f(p',x')e^{2i(p-p')(x-x')}, \tag{6.15}$$

这是一个新的有趣变换，不同于两维 Fourier 变换$\int \frac{dxdy}{4\pi^2}e^{ipx+iqy}h(x,y) = H(p,q)$，且当取 $f(p',x') = 1$ 时，

$$\int \frac{dx'dp'}{\pi}e^{2i(p-p')(x-x')} = \int dx'\delta(x-x')e^{2ip(x-x')} = 1, \tag{6.16}$$

这就表明变换式(6.15) 可看成函数 $G(p,x)$ 的展开式，其系数为 $f(p',x')$. 式(6.15) 的逆变换为

$$\int \frac{dx'dp'}{\pi}e^{-2i(p-p')(x-x')}G(p',x') = f(p,x). \tag{6.17}$$

证明如下：将式(6.15)代入式(6.17)，有

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}x'\mathrm{d}p'}{\pi}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(p-p')(x-x')}G(p'-x') \\
&= \int \frac{\mathrm{d}x'\mathrm{d}p'}{\pi}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(p-p')(x-x')}\int \frac{\mathrm{d}x''\mathrm{d}p''}{\pi}f(p'',x'')\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p'-p'')(x'-x'')} \\
&\quad \int \frac{\mathrm{d}x''\mathrm{d}p''}{\pi}f(p'',x'')\int \frac{\mathrm{d}x'\mathrm{d}p'}{\pi}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}[(p-p')(x-x')+(p'-p'')(x'-x'')]} \\
&= \int \mathrm{d}x''\mathrm{d}p''f(p'',x'')\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p''x''-px)}\delta(p-p'')\delta(x-x'') \\
&= f(p,x).
\end{aligned}
\tag{6.18}
$$

式(6.15)与式(6.17)具有可逆保迹性，即

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}p}{\pi}\mid f(p,x)\mid^2 \\
&= \int \frac{\mathrm{d}x'\mathrm{d}p'}{\pi}\mid G(p',x')\mid^2\int \frac{\mathrm{d}x''\mathrm{d}p''}{\pi}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(x''p''-xp)}\cdot \\
&\quad \int \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}p}{\pi}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}[-(x'x+p'p)+(xx''+pp'')]} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}x'\mathrm{d}p'}{\pi}\mid G(p',x')\mid^2\int \mathrm{d}x''\mathrm{d}p''\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(x''p''-xp)}\delta(x-x'')\delta(p-p'') \\
&= \int \frac{\mathrm{d}x'\mathrm{d}p'}{\pi}\mid G(p',x')\mid^2,
\end{aligned}
\tag{6.19}
$$

这有些像 Parsval 定理[98].

下面，用上面的范氏变换来讨论一些算符编序问题[94]. 例如：从式(6.5)可以看到如下的范氏变换而导出 $\hat{P}-\hat{X}$ 排列：

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}x}{\pi}\,\vdots\,\exp[-2\mathrm{i}(x-\hat{X})(p-\hat{P})]\,\vdots\,f(p,x) \\
&= \int \mathrm{d}p\mathrm{d}x\delta(p-\hat{P})\delta(x-\hat{X})f(p,x) \\
&= f(\hat{P},\hat{X})\mid_{\hat{P}\text{在}\hat{X}\text{前}},
\end{aligned}
\tag{6.20}
$$

而从式(6.7)又见

$$
\int \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}x}{\pi}\,\vdots\,\exp[2\mathrm{i}(x-\hat{X})(p-\hat{P})]\,\vdots\,f(p,x)
$$

$$= \int \mathrm{d}p\mathrm{d}x\delta(x-\hat{X})\delta(p-\hat{P})f(p,x)$$

$$= f(\hat{P},\hat{X})\,|_{\hat{X}\text{在}\hat{P}\text{前}}. \tag{6.21}$$

再利用式(6.7),也能导出

$$\hat{X}^m\hat{P}^r = \int \mathrm{d}p\mathrm{d}x x^m p^r \delta(x-\hat{X})\delta(p-\hat{P})$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}x}{\pi} x^m p^r \vdots \exp[2\mathrm{i}(p-\hat{P})(x-\hat{X})] \vdots$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m+r} (-\mathrm{i})^r \vdots \mathrm{H}_{m,r}(\sqrt{2}\hat{X},\mathrm{i}\sqrt{2}\hat{P}) \vdots, \tag{6.22}$$

式中:$\mathrm{H}_{m,r}$ 是双变量 Hermite 多项式

$$\mathrm{H}_{m,r}(t,s) = \sum_{l=0}^{\min(m,r)} \frac{m!r!(-1)^l}{l!(m-l)!(r-l)!} t^{m-l}s^{r-l}, \tag{6.23}$$

以及相关积分公式

$$\int \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi} x^m y^r \exp[2\mathrm{i}(y-s)(x-t)] = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m+r} (-\mathrm{i})^r \mathrm{H}_{m,r}(\sqrt{2}t,\mathrm{i}\sqrt{2}s), \tag{6.24}$$

其证明如下:

$$\int \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi} x^m y^r \exp[2\mathrm{i}(y-s)(x-t)]$$

$$= \mathrm{e}^{2\mathrm{i}st}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^r\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^m \int \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}xy-2\mathrm{i}yt-2\mathrm{i}sx}$$

$$= \mathrm{e}^{2\mathrm{i}st}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^r\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^m \int \mathrm{d}x\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}sx}\delta(x-t)$$

$$= \mathrm{e}^{2\mathrm{i}st}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^r\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^m \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}st}$$

$$= \text{右边}. \tag{6.25}$$

因此,范氏变换理论提供一种简单的方法将 $\hat{X}^m\hat{P}^r$ 变成相应的 Weyl 编序形式. 同样的方法,利用式(6.5) 以及式(6.24) 的复共轭,就得到 $\hat{P}^r\hat{X}^m$ 的 Weyl 编序形式,即

$$\begin{aligned}\hat{P}^r\hat{X}^m &= \int \mathrm{d}p\mathrm{d}x p^r x^m \delta(p-\hat{P})\delta(x-\hat{X}) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}x}{\pi} \vdots \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(x-\hat{X})(p-\hat{P})} \vdots x^m p^r \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m+r} \mathrm{i}^r \vdots \mathrm{H}_{m,r}(\sqrt{2}\hat{X}, -\mathrm{i}\sqrt{2}\hat{P}) \vdots.\end{aligned} \tag{6.26}$$

根据式(6.15) 与式(6.17)，易知式(6.24) 的逆变换形式为

$$\int \frac{\mathrm{d}s\mathrm{d}t}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m+r}(-\mathrm{i})^r \mathrm{H}_{m,r}(\sqrt{2}t, \mathrm{i}\sqrt{2}s)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(y-s)(x-t)} = x^m y^r, \tag{6.27}$$

这也是一个新的积分公式. 然后，依据式(6.5) 和式(6.27)，就有

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m+r}(-\mathrm{i})^r \mathrm{H}_{m,r}(\sqrt{2}\hat{X}, \mathrm{i}\sqrt{2}\hat{P}) \mid_{\hat{P}在\hat{X}前} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m+r}(-\mathrm{i})^r \int \mathrm{d}p\mathrm{d}x \delta(p-\hat{P})\delta(x-\hat{X})\mathrm{H}_{m,r}(\sqrt{2}x, \mathrm{i}\sqrt{2}p) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m+r}(-\mathrm{i})^r \int \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}x}{\pi}\mathrm{H}_{m,r}(\sqrt{2}x, \mathrm{i}\sqrt{2}p) \vdots \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(x-\hat{X})(p-\hat{P})} \vdots \\ &= \vdots \hat{X}^m\hat{P}^r \vdots.\end{aligned} \tag{6.28}$$

又因式(6.23)，有

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m+r}(-\mathrm{i})^r \mathrm{H}_{m,r}(\sqrt{2}\hat{X}, \mathrm{i}\sqrt{2}\hat{P}) \mid_{\hat{P}在\hat{X}前} \\ &= \sum_{l=0}^{\min(m,r)}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^l l!\binom{r}{l}\binom{m}{l}\hat{P}^{r-l}\hat{X}^{m-l},\end{aligned} \tag{6.29}$$

联合式(6.28) 与式(6.29)，能导出

$$\vdots \hat{X}^m\hat{P}^r \vdots = \sum_{l=0}^{\min(m,r)}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^l l!\binom{r}{l}\binom{m}{l}\hat{P}^{r-l}\hat{X}^{m-l}. \tag{6.30}$$

类似地，从式(6.7) 与式(6.28) 的复共轭，有

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m+r}\mathrm{i}^r \mathrm{H}_{m,r}(\sqrt{2}\hat{X}, -\mathrm{i}\sqrt{2}\hat{P}) \mid_{\hat{X}在\hat{P}前}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m+r} \mathrm{i}^r \int \mathrm{d}p\mathrm{d}x \delta(x - \hat{X})\delta(p - \hat{P}) \mathrm{H}_{m,r}(\sqrt{2}x, -\mathrm{i}\sqrt{2}p)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m+r} \mathrm{i}^r \int \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}x}{\pi} \mathrm{H}_{m,r}(\sqrt{2}x, -\mathrm{i}\sqrt{2}p) \vdots \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(x-\hat{X})(p-\hat{P})} \vdots$$

$$= \vdots \hat{X}^m \hat{P}^r \vdots = \vdots \hat{P}^r \hat{X}^m \vdots, \tag{6.31}$$

即

$$\vdots \hat{X}^m \hat{P}^r \vdots = \sum_{l=0}^{\min(m,r)} \left(\frac{-\mathrm{i}}{2}\right)^l l! \binom{r}{l} \binom{m}{l} \hat{X}^{m-l} \hat{P}^{r-l}, \tag{6.32}$$

所以,式(6.28) 与式(6.31) 分别是将 Weyl 编序形式转变为 $\hat{P}$ 在 $\hat{X}$ 前或 $\hat{X}$ 在 $\hat{P}$ 前的排序形式的基本公式.

联合式(6.22),式(6.23) 与式(6.30),也能得到 $\hat{X}^m \hat{P}^r$ 变成 $\hat{P}$ 在 $\hat{X}$ 前的形式:

$$\begin{aligned}
&\hat{X}^m \hat{P}^r \\
&= \sum_{l=0}^{\min(m,r)} \frac{m!r!}{l!(m-l)!(r-l)!} \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^l \vdots \hat{X}^{m-l} \hat{P}^{r-l} \vdots \\
&= \sum_{l=0}^{\min(m,r)} \frac{m!r!}{l!(m-l)!(r-l)!} \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^l \sum_{k=0} \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^k k! \binom{r-l}{k} \binom{m-l}{k} \cdot \\
&\qquad \hat{P}^{r-l-k} \hat{X}^{m-l-k} \\
&= \sum_{l=0}^{\min(m,r)} \sum_{k=0} \frac{m!r!}{l!(m-l-k)!(r-l-k)!k!} \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{l+k} \hat{P}^{r-l-k} \hat{X}^{m-l-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\min(m,r)} \frac{\mathrm{i}^k m!r!}{(m-k)!(r-k)!k!} \hat{P}^{r-k} \hat{X}^{m-k},
\end{aligned} \tag{6.33}$$

这样就得到它们的对易形式

$$[\hat{X}^m, \hat{P}^r] = \sum_{k=1}^{\min(m,r)} \frac{\mathrm{i}^k m!r!}{(m-k)!(r-k)!k!} \hat{P}^{r-k} \hat{X}^{m-k}. \tag{6.34}$$

另一方面,从式(6.26),式(6.23) 以及式(6.32),也有

$$\hat{P}^r \hat{X}^m = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{m+r} \mathrm{i}^r \vdots \mathrm{H}_{m,r}(\sqrt{2}\hat{X}, -\mathrm{i}\sqrt{2}\hat{P}) \vdots$$

$$= \sum_{l=0}^{\min(m,r)} \frac{m!r!}{l!(m-l)!(r-l)!}\left(\frac{-\mathrm{i}}{2}\right)^{l} \vdots \hat{X}^{m-l}\hat{P}^{r-l} \vdots$$

$$= \sum_{l=0}^{\min(m,r)} \frac{m!r!}{l!(m-l)!(r-l)!}\left(\frac{-\mathrm{i}}{2}\right)^{l} \sum_{k=0} \left(\frac{-\mathrm{i}}{2}\right)^{k} k! \binom{r-l}{k}\binom{m-l}{k}$$

$$\hat{X}^{m-l-k}\hat{P}^{r-l-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\min(m,r)} \frac{m!r!}{(m-k)!(r-k)!k!}(-\mathrm{i})^{k}\hat{X}^{m-k}\hat{P}^{r-k}, \tag{6.35}$$

这就是将 $\hat{P}^r\hat{X}^m$ 变成 $\hat{X}$ 在 $\hat{P}$ 前的排序形式,同时

$$[\hat{X}^m, \hat{P}^r] = \sum_{k=1}^{\min(m,r)} \frac{m!r!(-\mathrm{i})^k}{(m-k)!(r-k)!k!}\hat{X}^{m-k}\hat{P}^{r-k}. \tag{6.36}$$

因为

$$(\hat{P}+\hat{X})^n = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n}\mathrm{e}^{\lambda(\hat{P}+\hat{X})}\bigg|_{\lambda=0} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n} \vdots\, \mathrm{e}^{\lambda(\hat{P}+\hat{X})} \vdots \Big|_{\lambda=0}$$

$$= \vdots (\hat{P}+\hat{X})^n \vdots = \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l} \vdots \hat{X}^{l}\hat{P}^{n-l} \vdots, \tag{6.37}$$

将式(6.30)代入式(6.37),可以推出

$$(\hat{P}+\hat{X})^n = \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\sum_{k=0}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{k} k!\binom{l}{k}\binom{n-l}{k}\hat{P}^{l-k}\hat{X}^{n-l-k}, \tag{6.38}$$

或者用式(6.32),也有

$$(\hat{P}+\hat{X})^n = \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\sum_{k=0}\left(\frac{-\mathrm{i}}{2}\right)^{k} k!\binom{l}{k}\binom{n-l}{k}\hat{X}^{l-k}\hat{P}^{n-l-k}. \tag{6.39}$$

## 6.2 纠缠 Wigner 算符的新变换与应用

将范氏变换推广到双模纠缠情况[97],并研究其性质与相关应用. 前一章知道 $\Delta(\sigma,\gamma)$ 的 Weyl 编序形式为

$$\Delta(\sigma,\gamma) = \vdots\, \delta(\sigma - a_1 + a_2^\dagger)\delta(\sigma^* - a_1^\dagger + a_2)\delta(\gamma - a_1 - a_2^\dagger) \cdot$$

$$\delta(\gamma^* - a_1^\dagger - a_2) \vdots, \tag{6.40}$$

下面为了简单起见，令

$$\delta^{(2)}(\sigma - a_1 + a_2^\dagger)\delta^{(2)}(\gamma - a_1 - a_2^\dagger)$$
$$\equiv \delta(\sigma - a_1 + a_2^\dagger)\delta(\sigma^* - a_1^\dagger + a_2)\delta(\gamma - a_1 - a_2^\dagger)\delta(\gamma^* - a_1^\dagger - a_2). \tag{6.41}$$

自然就要问 $\delta^{(2)}(\nu - a_1 + a_2^\dagger)\delta^{(2)}(\mu - a_1 - a_2^\dagger)$ 的 Weyl 编序形式是什么呢？鉴于纠缠 Wigner 算符与纠缠态表象有关并根据式(5.2) 与式(5.17) 可以导出 $\delta^{(2)}(\nu - a_1 + a_2^\dagger)\delta^{(2)}(\mu - a_1 - a_2^\dagger)$ 的 Weyl 编序形式，即

$$\delta(\nu - a_1 + a_2^\dagger)\delta(\nu^* - a_1^\dagger + a_2)\delta(\mu - a_1 - a_2^\dagger)\delta(\mu^* - a_1^\dagger - a_2)$$
$$= \int \frac{d^2\eta d^2\xi}{\pi^2}\delta^{(2)}(\nu - a_1 + a_2^\dagger)\ |\eta\rangle\langle\eta|\xi\rangle\langle\xi|\ \delta^{(2)}(\mu - a_1 - a_2^\dagger)$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{d^2\eta d^2\xi}{\pi^2}\ |\eta\rangle\langle\xi|\ e^{(\eta^*\xi - \eta\xi^*)/2}\delta^{(2)}(\nu - \eta)\delta^{(2)}(\mu - \xi)$$
$$= \frac{1}{2}\ |\eta\rangle_{\eta=\nu}\langle\xi|_{\xi=\mu}e^{(\nu^*\mu - \nu\mu^*)/2}, \tag{6.42}$$

这里已用了 $|\xi\rangle$ 和 $|\eta\rangle$ 的内积

$$\langle\eta|\xi\rangle = \frac{1}{2}\exp[(\eta^*\xi - \xi^*\eta)/2]. \tag{6.43}$$

从式(6.42) 看出一旦知道 $|\eta\rangle\langle\xi|$ 的 Weyl 编序形式，便有 $\delta^{(2)}(\nu - a_1 + a_2^\dagger)\delta^{(2)}(\mu - a_1 - a_2^\dagger)$ 的 Weyl 编序形式. 为此，利用任意算符的 Weyl 编序双模展开式(5.32)，并利用

$$\langle\xi|\beta_1,\beta_2\rangle$$
$$= \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{2} + \xi^*\beta_1 + \xi\beta_2 - \beta_1\beta_2 - \frac{|\beta_1|^2}{2} - \frac{|\beta_2|^2}{2}\right) \tag{6.44}$$

和

$$\langle -\beta_1, -\beta_2|\eta\rangle$$
$$= \exp\left(-\frac{|\eta|^2}{2} - \eta\beta_1^* + \eta^*\beta_2^* + \beta_1^*\beta_2^* - \frac{|\beta_1|^2}{2} - \frac{|\beta_2|^2}{2}\right), \tag{6.45}$$

能导出 $|\eta\rangle\langle\xi|$ 的 Weyl 编序形式

$$|\eta\rangle\langle\xi|) = 4\int\frac{d^2\beta_1 d^2\beta_2}{\pi^2}\vdots\langle-\beta_1,-\beta_2|\eta\rangle\langle\xi|\beta_1,\beta_2\rangle\cdot$$

$$\exp\left[2\sum_{k=1}^{2}(\beta_k^* a_k - a_k^\dagger\beta_k + a_k^\dagger a_k)\right]\vdots$$

$$= 4\int\frac{d^2\beta_1 d^2\beta_2}{\pi^2}\vdots\exp\left[-\frac{|\eta|^2}{2} - \eta\beta_1^* + \eta^*\beta_2^* + \beta_1^*\beta_2^*\right.$$

$$-|\beta_1|^2 - |\beta_2|^2 - \frac{|\xi|^2}{2} + \xi^*\beta_1 + \xi\beta_2 - \beta_1\beta_2 +$$

$$\left.2\sum_{k=1}^{2}(\beta_k^* a_k - a_k^\dagger\beta_k + a_k^\dagger a_k)\right]\vdots$$

$$= 4e^{-\frac{|\eta|^2}{2}-\frac{|\xi|^2}{2}}\int\frac{d^2\beta_2}{\pi}\vdots\exp[-2|\beta_2|^2 + \beta_2(\xi - 2a_2^\dagger - 2a_1 + \eta) +$$

$$\beta_2^*(\eta^* + 2a_2 + \xi^* - 2a_1^\dagger) + (\xi^* - 2a_1^\dagger)(2a_1 - \eta) +$$

$$2\sum_{k=1}^{2}a_k^\dagger a_k]\vdots$$

$$= 2\vdots\exp\left[\frac{1}{2}(\xi\eta^* - \eta\xi^*) + \xi(a_2 - a_1^\dagger) + \eta(a_2 + a_1^\dagger) -\right.$$

$$\left.\eta^*(a_1 + a_2^\dagger) + \xi^*(a_1 - a_2^\dagger) + 2a_2^\dagger a_1^\dagger - 2a_2 a_1\right]\vdots, \tag{6.46}$$

其中已用了积分公式

$$\int\frac{d^2 z}{\pi}\exp(\zeta|z|^2 + \xi z + \eta z^*) = -\frac{1}{\zeta}\exp\left[-\frac{\xi\eta}{\zeta}\right],\quad \mathrm{Re}(\zeta) < 0. \tag{6.47}$$

从式(6.46)就有

$$\frac{1}{2}|\eta\rangle\langle\xi|\, e^{(\eta^*\xi-\eta\xi^*)/2} = \vdots\exp[(\xi - a_1 - a_2^\dagger)(\eta^* - a_1^\dagger + a_2) -$$

$$(\eta - a_1 + a_2^\dagger)(\xi^* - a_1^\dagger - a_2)]\vdots. \tag{6.48}$$

将式(6.48)代入式(6.42),便有

$$\delta^{(2)}(\nu - a_1 + a_2^\dagger)\delta^{(2)}(\mu - a_1 - a_2^\dagger)$$

$$= \vdots\exp[(\mu - a_1 - a_2^\dagger)(\nu^* - a_1^\dagger + a_2) -$$

$$(\nu - a_1 + a_2^\dagger)(\mu^* - a_1^\dagger - a_2)]\vdots, \tag{6.49}$$

它在$\vdots\ \vdots$内是 exp 指数形式. 注意到

$$[a_1^\dagger - a_2, a_1 + a_2^\dagger] = -2, \tag{6.50}$$

就应该考虑到不同于式(6.42) 的另一形式

$$\delta^{(2)}(\mu - a_1 - a_2^\dagger)\delta^{(2)}(\nu - a_1 + a_2^\dagger) = \frac{1}{2}\int \frac{d^2\eta d^2\xi}{\pi^2} |\xi\rangle\langle\eta| e^{(\eta\xi^* - \eta^*\xi)/2}\delta^{(2)}(\nu - \eta)\delta^{(2)}(\mu - \xi). \tag{6.51}$$

与导出式(6.48) 类似的方法, 也有

$$\frac{1}{2}|\xi\rangle\langle\eta| e^{(\eta\xi^* - \eta^*\xi)/2} = \vdots \exp[(\eta - a_1 + a_2^\dagger)(\xi^* - a_1^\dagger - a_2) - (\xi - a_1 - a_2^\dagger)(\eta^* - a_1^\dagger + a_2)] \vdots, \tag{6.52}$$

即

$$\begin{aligned}&\delta^{(2)}(\mu - a_1 - a_2^\dagger)\delta^{(2)}(\nu - a_1 + a_2^\dagger)\\&= \vdots \exp[-(\mu - a_1 - a_2^\dagger)(\nu^* - a_1^\dagger + a_2) + (\nu - a_1 + a_2^\dagger)(\mu^* - a_1^\dagger - a_2)] \vdots.\end{aligned} \tag{6.53}$$

从式(6.49) 与式(6.53) 的结果, 必须指出由于 Weyl 编序符号$\vdots\ \vdots$存在, $(\vdots\, e^x \,\vdots)^{-1}$ 不等于$\vdots\, e^{-x} \,\vdots$.

下面, 考虑纠缠 Wigner 算符 $\Delta(\mu,\nu)$ 与 $\delta^{(2)}(\eta - a_1 + a_2^\dagger)\delta^{(2)}(\xi - a_1 - a_2^\dagger)$ 的积分变换关系. 作为式(6.40) 与式(6.49) 的结果, 有

$$\begin{aligned}&\delta^{(2)}(\eta - a_1 + a_2^\dagger)\delta^{(2)}(\xi - a_1 - a_2^\dagger)\\&= \vdots \exp[(\xi - a_1 - a_2^\dagger)(\eta^* - a_1^\dagger + a_2) - (\eta - a_1 + a_2^\dagger)(\xi^* - a_1^\dagger - a_2)] \vdots\\&= \int \frac{d^2\mu d^2\nu}{\pi^2} \vdots\, e^{(\xi-\mu)(\eta^*-\nu^*)-(\eta-\nu)(\xi^*-\mu^*)}\delta^{(2)}(\mu - a_1 - a_2^\dagger)\cdot \delta^{(2)}(\nu - a_1 + a_2^\dagger) \vdots\\&= \int \frac{d^2\mu d^2\nu}{\pi^2} e^{(\xi-\mu)(\eta^*-\nu^*)-(\eta-\nu)(\xi^*-\mu^*)}\Delta(\mu,\nu),\end{aligned} \tag{6.54}$$

这就是纠缠 Wigner 算符与 $\Delta(\mu,\nu)$ 和 $\delta^{(2)}(\mu - a_1 - a_2^\dagger)\delta^{(2)}(\nu - a_1 + a_2^\dagger)$ 的相互变换式. 由于$\int d^2\mu d^2\nu \Delta(\mu,\nu) = 1$, 可认为四个 δ 算

符乘积以 $\Delta(\mu,\nu)$ 形式展开. 设 $W(\mu,\nu)=\langle\psi|\,\Delta(\mu,\nu)\,|\psi\rangle$，从式(6.48)与式(6.54)就能得到 $|\psi\rangle$ 的 Wigner 函数积分关系

$$\int\frac{d^2\mu d^2\nu}{\pi^2}e^{(\xi-\mu)(\eta^*-\nu^*)-(\eta-\nu)(\xi^*-\mu^*)}W(\mu,\nu)=\frac{1}{2}\langle\psi|\eta\rangle\langle\xi|\psi\rangle e^{(\eta^*\xi-\eta\xi^*)/2},\tag{6.55}$$

而式(6.54)的逆变换为

$$\begin{aligned}&\int\frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2}\delta^{(2)}(\eta-a_1+a_2^\dagger)\delta^{(2)}(\xi-a_1-a_2^\dagger)e^{-(\xi-\mu)(\eta^*-\nu^*)+(\eta-\nu)(\xi^*-\mu^*)}\\&=\int\frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2}\int\frac{d^2\mu'd^2\nu'}{\pi^2}\Delta(\mu',\nu')e^{(\xi-\mu')(\eta^*-\nu'^*)-(\eta-\nu')(\xi^*-\mu'^*)}\cdot\\&\quad e^{-(\xi-\mu)(\eta^*-\nu^*)+(\eta-\nu)(\xi^*-\mu^*)}\\&=\int\frac{d^2\mu'd^2\nu'}{\pi^2}\Delta(\mu',\nu')e^{(-\nu'\mu'^*+\mu'\nu'^*-\mu\nu^*+\nu\mu^*)}\cdot\\&\quad\int\frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2}e^{\xi(\nu^*-\nu'^*)+\xi^*(\nu'-\nu)}e^{\eta^*(\mu-\mu')+\eta(\mu'^*-\mu^*)}\\&=\int\frac{d^2\mu'd^2\nu'}{\pi^2}\Delta(\mu',\nu')e^{(-\nu'\mu'^*+\mu'\nu'^*-\mu\nu^*+\nu\mu^*)}\delta^{(2)}(\nu'-\nu)\delta^{(2)}(\mu'-\mu)\\&=\Delta(\mu,\nu),\end{aligned}\tag{6.56}$$

所以式(6.54)与式(6.56)有资格成为量子相空间中有关纠缠 Wigner 算符的新复积分变换.

如果在式(6.56)两边同时左乘 $\int\frac{d^2\mu\, d^2\nu}{\pi^2}D(\nu,\mu)$，并考虑

$$\hat{X}_j=\frac{a_j+a_j^\dagger}{\sqrt{2}},\quad\hat{P}_j=\frac{a_j-a_j^\dagger}{i\sqrt{2}},\tag{6.57}$$

得

$$\begin{aligned}&\int\frac{d^2\mu d^2\nu}{\pi^2}D(\nu,\mu)\Delta(\mu,\nu)\\&=\int\frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2}\delta^{(2)}(\eta-a_1+a_2^\dagger)\delta^{(2)}(\xi-a_1-a_2^\dagger)\cdot\\&\quad\int\frac{d^2\mu d^2\nu}{\pi^2}D(\nu,\mu)e^{-(\xi-\mu)(\eta^*-\nu^*)+(\eta-\nu)(\xi^*-\mu^*)}\end{aligned}$$

$$
= \int \frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2} \delta^{(2)}(\eta - a_1 + a_2^\dagger) \delta^{(2)}(\xi - a_1 - a_2^\dagger) \mathscr{F}(\eta, \xi)
$$

$$
= \int \frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2} \delta\left(\eta_1 - \frac{\hat{X}_1 - \hat{X}_2}{\sqrt{2}}\right) \delta\left(\eta_2 - \frac{\hat{P}_1 + \hat{P}_2}{\sqrt{2}}\right) \cdot
$$

$$
\delta\left(\xi_1 - \frac{\hat{X}_1 + \hat{X}_2}{\sqrt{2}}\right) \delta\left(\xi_2 - \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{2}}\right) \mathscr{F}(\eta, \xi)
$$

$$
= \mathscr{F}\left(\frac{\hat{X}_1 - \hat{X}_2}{\sqrt{2}}, \frac{\hat{P}_1 + \hat{P}_2}{\sqrt{2}}, \frac{\hat{X}_1 + \hat{X}_2}{\sqrt{2}}, \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{2}}\right), \qquad (6.58)
$$

其中已引入

$$
\mathscr{F}(\eta, \xi) \equiv \int \frac{d^2\mu d^2\nu}{\pi^2} D(\nu, \mu) e^{(\xi^* - \mu^*)(\eta - \nu) - (\eta^* - \nu^*)(\xi - \mu)}, \qquad (6.59)
$$

这也是有用的积分变换，它具有逆变换形式

$$
\int \frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2} e^{(\xi - \mu)(\eta^* - \nu^*) - (\eta - \nu)(\xi^* - \mu^*)} \mathscr{F}(\eta, \xi) \equiv D(\nu, \mu). \qquad (6.60)
$$

只要将式(6.60)代入式(6.59)就能证明

$$
\int \frac{d^2\xi' d^2\eta'}{\pi^2} \mathscr{F}(\eta', \xi') \cdot
$$

$$
\int \frac{d^2\mu d^2\nu}{\pi^2} e^{(\xi' - \mu)(\eta'^* - \nu^*) - (\eta' - \nu)(\xi'^* - \mu^*) + (\xi^* - \mu^*)(\eta - \nu) - (\eta^* - \nu^*)(\xi - \mu)}
$$

$$
= \int \frac{d^2\xi' d^2\eta'}{\pi^2} \mathscr{F}(\eta', \xi') e^{(\xi' \eta'^* - \eta' \xi'^* + \xi^* \eta - \eta^* \xi)} \cdot
$$

$$
\int \frac{d^2\mu d^2\nu}{\pi^2} e^{(\eta^* - \eta'^*)\mu + (\eta' - \eta)\mu^*} e^{(\xi'^* - \xi^*)\nu + (\xi - \xi')\nu^*}
$$

$$
= \int d^2\xi' d^2\eta' \mathscr{F}(\eta', \xi') e^{(\xi' \eta'^* - \eta' \xi'^* + \xi^* \eta - \eta^* \xi)} \delta^{(2)}(\eta' - \eta) \delta^{(2)}(\xi - \xi')
$$

$$
= \mathscr{F}(\eta, \xi). \qquad (6.61)
$$

由于

$$
\int \frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2} \exp[(\xi - \mu)(\eta^* - \nu^*) - (\eta - \nu)(\xi^* - \mu^*)]
$$

$$
= \int d^2\xi \delta(\xi - \mu) \delta(\xi^* - \mu^*) e^{\nu(\xi^* - \mu^*) - \nu^*(\xi - \mu)} = 1, \qquad (6.62)
$$

$e^{(\xi-\mu)(\eta^*-\nu^*)-(\eta-\nu)(\xi^*-\mu^*)}$ 可看成在 $\xi$-$\eta$ 复相空间的基矢函数，或者式(6.60) 看成以 $e^{(\xi-\mu)(\eta^*-\nu^*)-(\eta-\nu)(\xi^*-\mu^*)}$ 分解 $D(\nu,\mu)$，其相应的系数为 $\mathscr{F}(\eta,\xi)$. 另外，可以证明

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2} \mid \mathscr{F}(\eta,\xi) \mid^2 \\
&= \int \frac{d^2\mu d^2\nu}{\pi^2} \mid D(\nu,\mu) \mid^2 \int \frac{d^2\mu' d^2\nu'}{\pi^2} \exp[(\mu^*\nu-\nu^*\mu)+ \\
&\quad (\mu'\nu'^*-\nu'\mu'^*)] \cdot \\
&\quad \int \frac{d^2\xi d^2\eta}{\pi^2} \exp[(\mu'^*-\mu^*)\eta+(\mu-\mu')\eta^*+(\nu^*-\nu'^*)\xi+ \\
&\quad (\nu'-\nu)\xi^*] \\
&= \int \frac{d^2\mu d^2\nu}{\pi^2} \mid D(\nu,\mu) \mid^2 \int d^2\mu' d^2\nu' e^{(\mu^*\nu-\nu^*\mu)+(\mu'\nu'^*-\nu'\mu'^*)} \cdot \\
&\quad \delta^{(2)}(\mu-\mu')\delta^{(2)}(\nu'-\nu) \\
&= \int \frac{d^2\mu d^2\nu}{\pi^2} \mid D(\nu,\mu) \mid^2,
\end{aligned} \tag{6.63}
$$

这表明式(6.59) 与式(6.60) 的变换式也满足可逆保迹性.

利用上述的新变换也可以解决一些对于式(6.50) 的算符编序问题. 例如，我们想将算符$(a_1^\dagger-a_2)^n(a_1+a_2^\dagger)^m$ 变成它的 Weyl 编序形式. 根据纠缠态的完备性以及式(6.43)，有

$$
\frac{1}{2}\int \frac{d^2\eta d^2\xi}{\pi^2} \mid \eta\rangle\langle\xi\mid e^{(\eta^*\xi-\eta\xi^*)/2} = 1 \tag{6.64}
$$

和

$$
\frac{1}{2}\int \frac{d^2\eta d^2\xi}{\pi^2} \mid \xi\rangle\langle\eta\mid e^{(\eta\xi^*-\eta^*\xi)/2} = 1. \tag{6.65}
$$

再利用式(6.48)，式(6.64)，式(5.2)，式(5.17) 以及积分公式(6.24)，得到

$$
\begin{aligned}
&(a_1^\dagger-a_2)^n(a_1+a_2^\dagger)^m \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d^2\eta d^2\xi}{\pi^2}\eta^{*n}\xi^m \mid \eta\rangle\langle\xi\mid e^{(\eta^*\xi-\eta\xi^*)/2}
\end{aligned}
$$

$$= \int \frac{d^2\eta d^2\xi}{\pi^2} \eta^{*n}\xi^m \,\vdots\, e^{(\xi-a_1-a_2^\dagger)(\eta^*-a_1^\dagger+a_2)-(\eta-a_1+a_2^\dagger)(\xi^*-a_1^\dagger-a_2)} \,\vdots$$

$$= \int \frac{d^2\eta_1 d\eta_2 d^2\xi_1 d\xi_2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{m}{l} i^{k+1}\eta_1^{n-k}(-\eta_2)^k \xi_1^{m-l}\xi_2^l \cdot$$

$$\vdots \exp\left\{2i\left(-\eta_2+\frac{\hat{P}_1+\hat{P}_2}{\sqrt{2}}\right)\left(\xi_1-\frac{\hat{X}_1+\hat{X}_2}{\sqrt{2}}\right)\right\}\cdot$$

$$\exp\left\{2i\left(\eta_1-\frac{\hat{X}_1-\hat{X}_2}{\sqrt{2}}\right)\left(\xi_2-\frac{\hat{P}_1-\hat{P}_2}{\sqrt{2}}\right)\right\}\vdots$$

$$= -2^{-(m+n)/2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{m}{l} \vdots\, H_{n-k,l}[(\hat{X}_1-\hat{X}_2), i(\hat{P}_1-\hat{P}_2)]\cdot$$

$$H_{m-l,k}[(\hat{X}_1+\hat{X}_2), -i(\hat{P}_1+\hat{P}_2)] \,\vdots. \qquad (6.66)$$

同样地，利用式(6.52) 与式(6.65)，有

$$(a_1+a_2^\dagger)^m(a_1^\dagger-a_2)^n$$

$$= (-1)^{m+1}2^{-(m+n)/2}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{m}{l}\cdot$$

$$\vdots\, H_{n-k,l}[(\hat{X}_1+\hat{X}_2), i(\hat{P}_1+\hat{P}_2)]\cdot$$

$$H_{m-l,k}[-(\hat{X}_1-\hat{X}_2), i(\hat{P}_1-\hat{P}_2)] \,\vdots, \qquad (6.67)$$

这也得到了$(a_1+a_2^\dagger)^m(a_1^\dagger-a_2)^n$ 的 Weyl 编序形式.

# 第7章　用IWOP技术导出若干算符恒等式与新积分公式

IWOP技术实现对Dirac的ket-bra型算符的积分，这件事本身结合量子力学的若干算符公式可以推导出新的数学积分公式；反过来，从已知的数学公式也可推导出若干新的量子力学算符公式. 大家都知道Hermite多项式在数学、物理中都有广泛的应用[15,100~102]，它包括单变量$H_n(x)$与双变量$H_{m,n}(\xi,\xi^*)$，注意后者并不是前者两个的直积，实际上双变量Hermite多项式可看成两个单变量Hermite多项式的纠缠叠加[103]. 例如初等量子力学的谐振子波函数$\psi_n(x)=(2^n n!\sqrt{\pi})^{-1/2}e^{-x^2/2}H_n(x)$，它是一个完备的函数空间的基矢. 在量子光学中，$H_{m,n}(\xi,\xi^*)$可以看作广义Bargmann函数的基矢，其对应于双模Fock态[104]. 在文献[105, 106]中，已指出双模压缩Fock态就是双模压缩真空态在双变量Hermite多项式的激发. 在Fourier光学中，$H_{m,n}(\xi,\xi^*)$可看成复分数Fourier变换的本征函数以及梯度介质中电磁波传播的本征模[107,108]. 所以，本章给予Hermite多项式更多的关注，并用IWOP技术导出若干新的量子力学算符恒等式与积分公式.

## 7.1　有关单变量Hermite多项式的算符恒等式与新积分公式

### 7.1.1　$H_n(\hat{X})=2^n:\hat{X}^n:$的推导与应用

Hermite多项式的母函数定义是

$$\mathrm{H}_n(x)=\frac{\partial^n}{\partial t^n}\mathrm{e}^{-t^2+2tx}\Big|_{t=0}=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k} \tag{7.1}$$

或者

$$\mathrm{e}^{-t^2+2tx}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\mathrm{H}_n(x). \tag{7.2}$$

经典数 $x$ 对应坐标算符 $\hat{X}=\dfrac{a^\dagger+a}{\sqrt{2}}$,则用正规乘积内 $a$ 与 $a^\dagger$可交换的性质:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2t)^n}{n!}:\hat{X}^n:=:\mathrm{e}^{2t\hat{X}}:=:\mathrm{e}^{\sqrt{2}t(a^\dagger+a)}:=\mathrm{e}^{\sqrt{2}ta^\dagger}\mathrm{e}^{\sqrt{2}ta}, \tag{7.3}$$

利用 Baker-Hausdorff 公式

$$\mathrm{e}^{\hat{A}}\mathrm{e}^{\hat{B}}=\mathrm{e}^{\hat{A}+\hat{B}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]},[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]=[\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]]=0, \tag{7.4}$$

可将式(7.3) 以及式(7.2) 化为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2t)^n}{n!}:\hat{X}^n:=\mathrm{e}^{2t\hat{X}t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\mathrm{H}_n(\hat{X}), \tag{7.5}$$

比较上式两边相同 $t$ 幂次,立刻得到范氏公式

$$\mathrm{H}_n(\hat{X})=2^n:\hat{X}^n:, \tag{7.6}$$

此公式也被文献[109] 所证实. 当 $\mathrm{H}_n(\hat{X})$ 作用于真空态 $|0\rangle$,由式(7.6) 有

$$\mathrm{H}_n(\hat{X})\,|0\rangle=2^{n/2}a^{\dagger n}\,|0\rangle=\sqrt{n!2^n}\,|n\rangle, \tag{7.7}$$

式中:$|n\rangle=a^{\dagger n}/\sqrt{n!}\,|0\rangle$ 为粒子数态,再由 Fock 空间坐标本征态 $|x\rangle=\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}+\sqrt{2}xa^\dagger-\frac{a^{\dagger 2}}{2}\right)|0\rangle$,得

$$\langle x|n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!2^n}}\langle x|\,\mathrm{H}_n(\hat{X})\,|0\rangle=\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{n!2^n\sqrt{\pi}}}\mathrm{H}_n(x), \tag{7.8}$$

这与文献[15] 的结果完全一致.

根据 $\mathrm{H}_n(\hat{X})=2^n:\hat{X}^n:$ 也可以导出 Hermite 多项式递推关系. 由式(7.6),很容易导出

$$\mathrm{H}_n(-\hat{X}) = 2^n :(-\hat{X})^n: = (-1)^n \mathrm{H}_n(\hat{X}). \tag{7.9}$$

根据 Hermite 多项式关系$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{H}_n(x) = 2n\mathrm{H}_{n-1}(x)$，得到

$$2^n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{X}} :\hat{X}^n: = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{X}}\mathrm{H}_n(\hat{X}) = 2n\mathrm{H}_{n-1}(\hat{X}) = n2^n :\hat{X}^{n-1}:, \tag{7.10}$$

而很显然在 :: 有 $n:\hat{X}^{n-1}: = :\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{X}}\hat{X}^n:$ 成立，这就说明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{X}} :\hat{X}^n: = :\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{X}}\hat{X}^n:, \tag{7.11}$$

即说明了微商可穿越 ::，此性质是正规乘积一个非常重要的性质. 这样就利用式(7.6) 与式(7.11) 导出

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{X}}\right)^m \mathrm{H}_n(\hat{X}) &= 2^n \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{X}}\right)^m :\hat{X}^n: = 2^n :\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{X}}\right)^m \hat{X}^n: \\ &= \frac{2^n n!}{(n-m)!} :\hat{X}^{n-s}: = \frac{2^n n!}{(n-m)!}\mathrm{H}_{n-s}(\hat{X}),\end{aligned} \tag{7.12}$$

以及

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\hat{X}^2} :\hat{X}^n: = n(n-1) :\hat{X}^{n-1}: = 2n(\hat{X} :\hat{X}^{n-1}: - :\hat{X}^n:). \tag{7.13}$$

将式(7.13) 与式(7.6) 比较，可以得到熟知的 Hermite 多项式方程

$$\mathrm{H}''_n(\hat{X}) - 2\hat{X}\mathrm{H}'_n(\hat{X}) + 2n\mathrm{H}_n(\hat{X}) = 0. \tag{7.14}$$

从

$$\begin{aligned}[:f(a,a^\dagger):, a] &= -:\frac{\partial}{\partial a^\dagger}f(a,a^\dagger):, \\ [:f(a,a^\dagger):, a^\dagger] &= :\frac{\partial}{\partial a}f(a,a^\dagger):\end{aligned} \tag{7.15}$$

能计算出下列对易关系：

$$[:\hat{X}^n:,a] = -:\frac{\partial}{\partial a^\dagger}\hat{X}^n: = -\frac{1}{\sqrt{2}}n:\hat{X}^{n-1}:, \tag{7.16}$$

$$[:\hat{X}^n:,a^\dagger] = :\frac{\partial}{\partial a}\hat{X}^n: = \frac{1}{\sqrt{2}}n:\hat{X}^{n-1}:. \tag{7.17}$$

利用上述两式，就有

$$\begin{aligned}
:\hat{X}^n: &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger:\hat{X}^{n-1}:+:\hat{X}^{n-1}:a) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a^\dagger:\hat{X}^{n-1}:+a:\hat{X}^{n-1}:-\frac{1}{\sqrt{2}}(n-1):\hat{X}^{n-2}:\right) \\
&= \hat{X}:\hat{X}^{n-1}:-\frac{1}{2}(n-1):\hat{X}^{n-2}:,
\end{aligned} \tag{7.18}$$

再考虑式(7.6)，得到 Hermite 多项式递推关系式

$$\mathrm{H}_n(\hat{X}) = 2\hat{X}\mathrm{H}_{n-1}(\hat{X}) - 2(n-1)\mathrm{H}_{n-2}(\hat{X}). \tag{7.19}$$

将式(7.9)，式(7.14) 以及式(7.19) 中的 $\hat{X}\to x$，就变成我们熟知的 Hermite 多项式递推关系式[110].

利用 $\mathrm{H}_n(\hat{X}) = 2^n:\hat{X}^n:$ 导出积分公式. 从坐标表象的完备性 $\int \mathrm{d}x\ |x\rangle\langle x| = 1$，有

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_n(\hat{X}) &= \int \mathrm{d}x\ |x\rangle\langle x|\ \mathrm{H}_n(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int \mathrm{d}x:\mathrm{e}^{-(x-\hat{X})^2}:\mathrm{H}_n(x) \\
&= 2^n:\hat{X}^n:,
\end{aligned} \tag{7.20}$$

于是有积分公式

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int \mathrm{d}x\mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{H}_n(x) = 2^n y^n, \tag{7.21}$$

这与文献[111] 中的结果一致. 注意，这里并没有真正做积分计算便得到了积分公式，此外，也可接得到如下积分公式：

$$\int \mathrm{H}_n(\hat{X})\mathrm{d}\hat{X} = 2^n\int :\hat{X}^n:\mathrm{d}\hat{X} = \frac{2^n}{n+1}:X^{n+1}:+C$$

$$= \frac{1}{2(n+1)} \mathrm{H}_{n+1}(\hat{X}) + C, \tag{7.22}$$

即

$$\int_0^y \mathrm{H}_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2(n+1)}[\mathrm{H}_{n+1}(y) - \mathrm{H}_{n+1}(0)]. \tag{7.23}$$

现导出 $\mathrm{H}_n(\hat{X}) = 2^n : \hat{X}^n :$ 的逆关系. 由式(7.2) 和式(7.4) 得

$$\mathrm{e}^{-t\hat{X}} =: \mathrm{e}^{-t\hat{X}} : \mathrm{e}^{t^2/4} =: \mathrm{e}^{-t\hat{X}+t^2/4} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t/2)^n}{n!} : \mathrm{H}_n(\mathrm{i}\hat{X}) :, \tag{7.24}$$

将式(7.24) 与 $\mathrm{e}^{-t\hat{X}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t\hat{X})^n}{n!}$ 比较两边的 $t$ 次幂,有[112]

$$\hat{X}^n = (2\mathrm{i})^{-n} : \mathrm{H}_n(\mathrm{i}\hat{X}) :. \tag{7.25}$$

根据该结果,则

$$\hat{X}^{n+m} = \hat{X}^n \hat{X}^m = (2\mathrm{i})^{-n-m} : \mathrm{H}_n(\mathrm{i}\hat{X}) :: \mathrm{H}_m(\mathrm{i}\hat{X}) :, \tag{7.26}$$

以及

$$\hat{X}^{n+m} = (2\mathrm{i})^{-n-m} : \mathrm{H}_{n+m}(\mathrm{i}\hat{X}) :. \tag{7.27}$$

从式(7.26) 和式(7.27) 揭示了

$$: \mathrm{H}_n(\mathrm{i}\hat{X}) :: \mathrm{H}_m(\mathrm{i}\hat{X}) :=: \mathrm{H}_{n+m}(\mathrm{i}\hat{X}) :, \tag{7.28}$$

也很容易得到相干态表象中矩阵元

$$\langle z | \hat{X}^n | z \rangle = (2\mathrm{i})^{-n} \mathrm{H}_n\left(\mathrm{i}\frac{z+z^*}{\sqrt{2}}\right), \tag{7.29}$$

该结果非常简洁. 同样,利用坐标表象完备性,得

$$\hat{X}^n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \mathrm{d}x : \mathrm{e}^{-(x-\hat{X})^2} : x^n$$

$$= (2\mathrm{i})^{-n} : \mathrm{H}_n(\mathrm{i}\hat{X}) :, \tag{7.30}$$

于是就导出另一数学积分公式

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-(x-y)^2} x^n = (2\mathrm{i})^{-n} \mathrm{H}_n(\mathrm{i}y). \tag{7.31}$$

从式(7.1)看,联合式(7.6)与式(7.25),有

$$\hat{X}^n = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!:\hat{X}^{n-2k}:}{2^{2k}k!(n-2k)!} = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!\mathrm{H}_{n-2k}(\hat{X})}{2^n k!(n-2k)!} \tag{7.32}$$

这就得到 Hermite 多项式的另一种关系式

$$x^n = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!\mathrm{H}_{n-2k}(x)}{2^n k!(n-2k)!}. \tag{7.33}$$

### 7.1.2 $\mathrm{H}_n(\hat{\mathrm{X}}) = 2^n:\hat{\mathrm{X}}^n:$ 形式的推广

与推导 $H_n(\hat{X}) = 2^n:\hat{X}^n:$ 类似的方法,利用式(7.2)与式(7.4),有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2t)^n}{n!}:(\hat{X}+\hat{Y})^n: &=: \mathrm{e}^{2t(\hat{X}+\hat{Y})}: \\ &= \mathrm{e}^{2t(\hat{X}+\hat{Y})+2t^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\sqrt{2})^n}{n!}\mathrm{H}_n\left(\frac{\hat{X}+\hat{Y}}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned} \tag{7.34}$$

比较等式两边的 $t$ 次幂,就得到

$$\mathrm{H}_n\left(\frac{\hat{X}+\hat{Y}}{\sqrt{2}}\right) = (\sqrt{2})^n:(\hat{X}+\hat{Y})^n: \tag{7.35}$$

式中:$\hat{Y} = (b+b^\dagger)/\sqrt{2}$,$[b,b^\dagger] = 1$.实际上,直接利用双模坐标表象的完备性 $\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ |x,y\rangle\langle x,y| = 1$ 以及积分公式(7.21)与 $\int \mathrm{d}x\mathrm{e}^{-ax^2+bx} = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\mathrm{e}^{b^2/4a}$ 也可以证明:

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_n\left(\frac{\hat{X}+\hat{Y}}{\sqrt{2}}\right) &= \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{H}_n\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)|x,y\rangle\langle x,y| \\ &= \int \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi}\mathrm{H}_n\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right):\mathrm{e}^{-(x-\hat{X})^2-(y-\hat{Y})^2}:\end{aligned}$$

$$= \int \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{d}z}{\sqrt{\pi}} \mathrm{H}_n(z) \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\pi}} : \exp\left[-(\sqrt{2}z - y - \hat{X})^2 - (y - \hat{Y})^2\right]:$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\pi}} \mathrm{H}_n(z) : \exp\left[-\left(z - \frac{\hat{X}+\hat{Y}}{\sqrt{2}}\right)^2\right]:$$

$$= (\sqrt{2})^n : (\hat{X}+\hat{Y})^n :. \tag{7.36}$$

从证明过程来看,相比上述方法复杂得多.从式(7.36),不难发现这样的积分公式

$$\int \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi} \mathrm{H}_n\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2-(y-\nu)^2} = (\sqrt{2}\mu + \sqrt{2}\nu)^n. \tag{7.37}$$

根据二项式定理与式(7.6)并考虑 $:\hat{X}:$ 与 $:\hat{Y}:$ 是对易的,则有

$$\mathrm{H}_n\left(\frac{\hat{X}+\hat{Y}}{\sqrt{2}}\right) = (\sqrt{2})^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} : \hat{X}^k :: \hat{Y}^{n-k} :$$

$$= 2^{-n/2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{H}_k(\hat{X}) \mathrm{H}_{n-k}(\hat{Y}). \tag{7.38}$$

当 $\hat{X} \to x$ 与 $\hat{Y} \to y$,得到 Hermite 多项式的新关系式

$$\mathrm{H}_n\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) = 2^{-n/2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{H}_k(x) \mathrm{H}_{n-k}(y). \tag{7.39}$$

特殊情况,取 $x = y$,上式变为

$$\mathrm{H}_n(\sqrt{2}x) = 2^{-n/2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{H}_k(x) \mathrm{H}_{n-k}(x), \tag{7.40}$$

即

$$\mathrm{H}_n(\sqrt{2}\hat{X}) = 2^{-n/2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{H}_k(\hat{X}) \mathrm{H}_{n-k}(\hat{X})$$

$$= 2^{n/2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} : \hat{X}^k :: \hat{X}^{n-k} :. \tag{7.41}$$

这里需要强调的是尽管 $:\hat{X}^k:$ 与 $:\hat{X}^{n-k}:$ 相互对易的,但是

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}:\hat{X}^{k}::\hat{X}^{n-k}:\neq\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}:\hat{X}^{k}\hat{X}^{n-k}:=2^{n}:\hat{X}^{n}:.$$

(7.42)

此外,再根据式(7.6),有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{n}}{2^{n}n!}\mathrm{H}_{n}(\hat{X})\mathrm{H}_{n}(\hat{Y})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{n}t^{n}}{n!}:(\hat{X}\hat{Y})^{n}:=:\mathrm{e}^{2\hat{X}\hat{Y}}:,$$

(7.43)

另一方面,利用 IWOP 技术以及双模坐标表象的完备性,得到

$$\exp\left[\frac{t^{2}(\hat{X}^{2}+\hat{Y}^{2})-2t\hat{X}\hat{Y}}{t^{2}-1}\right]$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi}:\exp\left[\frac{t^{2}(x^{2}+x^{2})-2txy}{t^{2}-1}-(x-\hat{X})^{2}-(y-\hat{Y})^{2}\right]:$$

$$=\sqrt{1-t^{2}}:\mathrm{e}^{2\hat{X}\hat{Y}}:,\qquad(7.44)$$

联合式(7.43)与式(7.44),就得到 $\mathrm{H}_n(x)\mathrm{H}_n(y)$ 的产生函数为

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{n}}{2^{n}n!}\mathrm{H}_{n}(x)\mathrm{H}_{n}(y)=\frac{1}{\sqrt{1-t^{2}}}\exp\left[\frac{t^{2}(x^{2}+y^{2})-2txy}{t^{2}-1}\right].$$

(7.45)

下面,仍然利用式(7.2)与式(7.4),也可导出

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{n}}{n!}\mathrm{H}_{n}(f\hat{X})$$

$$=:\exp\left[-(t\sqrt{1-f^{2}})^{2}+2(t\sqrt{1-f^{2}})\frac{f\hat{X}}{\sqrt{1-f^{2}}}\right]:$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t\sqrt{1-f^{2}})^{n}}{n!}:\mathrm{H}_{n}\left(\frac{f\hat{X}}{\sqrt{1-f^{2}}}\right):,f\neq1,\qquad(7.46)$$

比较两边 $t$ 的同次幂得到

$$\mathrm{H}_{n}(f\hat{X})=(\sqrt{1-f^{2}})^{n}:\mathrm{H}_{n}\left(\frac{f\hat{X}}{\sqrt{1-f^{2}}}\right):,\qquad(7.47)$$

注意这里要求 $f\neq1$,所以不能想当然地,由 $\mathrm{H}_n(\hat{X})=2^n:\hat{X}^n:$ 就

推出 $H_n(f\hat{X}) = 2^n :(f\hat{X})^n:$. 再利用坐标完备性，就有

$$H_n(f\hat{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\pi}} H_n(fx) : e^{-(x-\hat{X})^2} :$$

$$= (1-f^2)^{n/2} : H_n\left(\frac{f\hat{X}}{\sqrt{1-f^2}}\right):, \quad (7.48)$$

这就表明也存在积分公式[111]

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\pi}} H_n(fx) e^{-(x-y)^2} = (1-f^2)^{n/2} H_n\left(\frac{fy}{\sqrt{1-f^2}}\right). \quad (7.49)$$

考虑到 Hermite 多项式求和理论

$$\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} H_{m-n}(\sqrt{2}fx) H_n(\sqrt{2}gy) = 2^{m/2} H_m(fx+gy), \quad (7.50)$$

再根据式(7.49)，可以得到

$$H_m(f\hat{X}+g\hat{Y}) = \int dx dy H_m(fx+gy) |x,y\rangle\langle x,y|$$

$$= \int \frac{dx dy}{\pi} H_m(fx+gy) : e^{-(x-\hat{X})^2-(y-\hat{Y})^2} :$$

$$= 2^{-m/2} \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} \int \frac{dx dy}{\pi} H_{m-n}(\sqrt{2}fx)$$

$$H_n(\sqrt{2}gy) : e^{-(x-\hat{X})^2-(y-\hat{Y})^2} :$$

$$= 2^{-m/2} \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} (1-2f^2)^{(m-n)/2} (1-2g^2)^{n/2} \cdot$$

$$: H_{m-n}\left[\frac{\sqrt{2}f\hat{X}}{\sqrt{1-2f^2}}\right] H_n\left[\frac{\sqrt{2}g\hat{Y}}{\sqrt{1-2g^2}}\right]:, \quad (7.51)$$

对式(7.51) 两边同时取 $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!}$ 求和，即

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} H_m(f\hat{X}+g\hat{Y})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(t\sqrt{\frac{1-2f^2}{2}}\right)^k \left(t\sqrt{\frac{1-2g^2}{2}}\right)^n}{n!k!} \cdot$$

$$: \mathrm{H}_k\left[\frac{\sqrt{2}f\hat{X}}{\sqrt{1-2f^2}}\right]\mathrm{H}_n\left[\frac{\sqrt{2}g\hat{Y}}{\sqrt{1-2g^2}}\right]:$$

$$=: \exp[-t^2(1-f^2-g^2)+2t(f\hat{X}+g\hat{Y})]:$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(t\sqrt{1-f^2-g^2})^m}{m!} : \mathrm{H}_m\left(\frac{f\hat{X}+g\hat{Y}}{\sqrt{1-f^2-g^2}}\right):, \tag{7.52}$$

注意这里已利用式(7.2)与取 $m-n=k$,并重排双重求和号

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{m} A_{m-n}B_n = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_k B_n. \tag{7.53}$$

比较式(7.52)两边 $t$ 的同次幂得到

$$\mathrm{H}_m(f\hat{X}+g\hat{Y}) = (\sqrt{1-f^2-g^2})^m : \mathrm{H}_m\left(\frac{f\hat{X}+g\hat{Y}}{\sqrt{1-f^2-g^2}}\right):. \tag{7.54}$$

特殊地,当取 $f=g=1$,上式就变为

$$\mathrm{H}_m(\hat{X}+\hat{Y}) = \mathrm{i}^m : \mathrm{H}_m[-\mathrm{i}(\hat{X}+\hat{Y})]:. \tag{7.55}$$

同样地,利用坐标的完备性,有

$$\mathrm{H}_m(f\hat{X}+g\hat{Y})$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi}\mathrm{H}_m(fx+gy) : \exp[-(x-\hat{X})^2-(y-\hat{Y})^2]:$$

$$= (\sqrt{1-f^2-g^2})^m : \mathrm{H}_m\left(\frac{f\hat{X}+g\hat{Y}}{\sqrt{1-f^2-g^2}}\right):, \tag{7.56}$$

因此,得到一个新的积分公式[113]

$$\int \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\pi}\mathrm{H}_m(fx+gy)\exp[-(x-\mu)^2-(y-\nu)^2]$$

$$= (\sqrt{1-f^2-g^2})^m \mathrm{H}_m\left(\frac{f\mu+g\nu}{\sqrt{1-f^2-g^2}}\right). \tag{7.57}$$

很明显，式(7.57) 与式(7.37) 是不同的，即要求 $f=g\neq\frac{1}{\sqrt{2}}$ 上式才成立.

从上面讨论可以看出，上述一些积分公式实际上并未进行真正的积分就可以得到，这就是 IWOP 技术的优点.

### 7.1.3 用 Hermite 多项式展开的新公式

结合IWOP技术也可以得到一些新的幂级数展开公式. 例如，用坐标表象完备性和式(7.20)，有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\lambda\hat{X}^2} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int \mathrm{d}x :\mathrm{e}^{-(x-\hat{X})^2-\lambda x^2}: \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}} :\exp\left(-\frac{\lambda}{1+\lambda}\hat{X}^2\right): \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{2^n n!}\mathrm{H}_{2n}(\hat{X}),
\end{aligned}
\tag{7.58}
$$

把 $\hat{X}$ 换成 $x$ 就是关于 $\mathrm{e}^{-\lambda\hat{X}^2}$ 用 $\mathrm{H}_{2n}(x)$ 展开的幂级数公式. 如果 $\mathrm{e}^{-\lambda\hat{X}^2}$ 作用在真空态 $|0\rangle$ 上，得

$$
\mathrm{e}^{-\lambda\hat{X}^2}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2(1+\lambda)}a^{\dagger 2}}|0\rangle,
\tag{7.59}
$$

这是一个压缩真空态.

下面说明如何将 $\sinh(2\hat{X})$ 展开成 Hermite 多项式. 根据 $\mathrm{H}_n(\hat{X})=2^n:\hat{X}^n:$，

$$
:\sinh(2\hat{X}): = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}:(2\hat{X})^{2n+1}: = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{H}_{2n+1}(\hat{X})}{(2n+1)!}.
\tag{7.60}
$$

由 Baker-Hausdorff 公式，注意到

$$
\mathrm{e}^{2\hat{X}} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}(a+a^\dagger)} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}a^\dagger}\mathrm{e}^{\sqrt{2}a}\mathrm{e} = \mathrm{e}:\mathrm{e}^{2\hat{X}}:,
\tag{7.61}
$$

$$e^{-2\hat{X}} = e^{-\sqrt{2}(a+a^\dagger)} = e^{-\sqrt{2}a^\dagger} e^{-\sqrt{2}a} e = e : e^{-2\hat{X}} :, \tag{7.62}$$

则

$$
\begin{aligned}
: \sinh(2\hat{X}) : &= : \frac{e^{2\hat{X}} - e^{-2\hat{X}}}{2} : \\
&= \frac{e^{-1}(e^{2X} - e^{-2X})}{2} \\
&= e^{-1}\sinh(2\hat{X}).
\end{aligned} \tag{7.63}
$$

由式(7.60) 与式(7.63) 可以得出新的级数展开公式，将 $\hat{X} \to x$，有

$$\sinh(2x) = e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{2n+1}(x)}{(2n+1)!}. \tag{7.64}$$

类似地，可以得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} H_{2n}(\hat{X}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} : (2\hat{X})^{2n} := e^{-1}\cosh(2\hat{X}), \tag{7.65}$$

即

$$\cosh(2x) = e\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{2n}(x)}{(2n)!}. \tag{7.66}$$

另一方面，注意到

$$e^{2i\hat{X}} = e^{\sqrt{2}i(a+a^\dagger)} = e^{\sqrt{2}ia^\dagger} e^{\sqrt{2}ia} e^{-1} = e^{-1} : e^{2i\hat{X}} :, \tag{7.67}$$

得

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n+1}(\hat{X})}{(2n+1)!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} : (2\hat{X})^{2n+1} := : \sin(2\hat{X}) : \\
&= : \frac{e^{2i\hat{X}} - e^{-2i\hat{X}}}{2i} := \frac{e(e^{2i\hat{X}} - e^{-2i\hat{X}})}{2i} \\
&= e\sin(2\hat{X}),
\end{aligned} \tag{7.68}
$$

即

$$\sin(2x) = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n H_{2n+1}(x)}{(2n+1)!}. \tag{7.69}$$

同样地，

$$\cos(2x) = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n H_{2n}(x)}{(2n)!}. \tag{7.70}$$

### 7.1.4 $\hat{X}^{-n}$ 的 Hermite 多项式展开

首先导出 $\hat{X}^{-1}$ 的正规乘积形式[114]. 根据坐标表象的完备性 $\int dx\, |x\rangle\langle x| = 1$,有

$$\frac{1}{\hat{X}} = \int dx\, \frac{1}{x}\, |x\rangle\langle x|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} : \lim_{A\to\infty,\epsilon\to 0_+}\left[\int_{-A}^{-\epsilon} dx\, \frac{e^{-(x-\hat{X})^2}}{x} + \int_{\epsilon}^{A} dx\, \frac{e^{-(x-\hat{X})^2}}{x}\right] : \tag{7.71}$$

令上式的第一项中 $x = -t$,则

$$\frac{1}{\hat{X}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} : \lim_{A\to\infty,\epsilon\to 0_+}\left[\int_{A}^{\epsilon} dt\, \frac{e^{-(t+\hat{X})^2}}{t} + \int_{\epsilon}^{A} dx\, \frac{e^{-(x-\hat{X})^2}}{x}\right]:$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} : \lim_{A\to\infty,\epsilon\to 0_+}\int_{\epsilon}^{A} dx\, \frac{e^{-(x-\hat{X})^2} - e^{-(x+\hat{X})^2}}{x} :$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} : \int_{0}^{+\infty} dx e^{-x^2}\, \frac{\exp(2x\hat{X}) - \exp(-2x\hat{X})}{x} e^{-\hat{X}^2} :. \tag{7.72}$$

现在把积分收敛在 $x = 0$ 与 $x \to +\infty$,于是有

$$\frac{1}{\hat{X}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} : \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k+2}}{(2k+1)!}\left(\int_{0}^{+\infty} dx e^{-x^2} x^{2k}\right)\hat{X}^{2k+1} e^{-\hat{X}^2} :$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} : \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k+2}}{(2k+1)!}\left(\int_{0}^{+\infty} dt e^{-t} t^{k-1/2}\right)\hat{X}^{2k+1} e^{-\hat{X}^2} :$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} : \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k+2}}{(2k+1)!}\Gamma(k+1/2)\hat{X}^{2k+1} e^{-\hat{X}^2} : \tag{7.73}$$

这里已用了积分公式

$$\int_0^{+\infty} dt e^{-t} t^{\upsilon-1} = \Gamma(\upsilon), \quad \mathrm{Re}\upsilon > 0. \tag{7.74}$$

再利用组合公式

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x(-1)^k}{k+x} \binom{n}{k} = 1 \Big/ \binom{n+x}{n}, \quad \binom{\lambda}{k} = \frac{\lambda!}{(\lambda-k)!k!} \tag{7.75}$$

以及 $\Gamma(k+1/2) = \sqrt{\pi} 2^{-k}(2k-1)!!$，进一步简化式(7.73) 为

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\hat{X}} &= : \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\hat{X}^{2k+1}}{(2k+1)k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \hat{X}^{2m}}{m!} : \\
&= : \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2(-1)^{n-k}}{(2k+1)k!(n-k)!} \hat{X}^{2n+1} : \\
&= : 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\frac{1}{2}(-1)^k}{k+\frac{1}{2}} \binom{n}{k} \frac{(-1)^n}{n!} \hat{X}^{2n+1} : \\
&= : 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{n+1/2}{n}} \frac{(-1)^n}{n!} \hat{X}^{2n+1} : \\
&= \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+3/2)} : \hat{X}^{2n+1} :.
\end{aligned} \tag{7.76}$$

根据 $H_n(\hat{X}) = 2^n : \hat{X}^n :$，就有

$$\frac{1}{\hat{X}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(2n+1)!!} H_{2n+1}(\hat{X}). \tag{7.77}$$

由于

$$\begin{aligned}
\hat{X} H_{2n+1}(\hat{X}) &= \frac{1}{2}(H_{2n+2}(\hat{X}) + H'_{2n+1}(\hat{X})) \\
&= \frac{1}{2}[H_{2n+2}(\hat{X}) + 2(2n+1)H_{2n}(\hat{X})],
\end{aligned} \tag{7.78}$$

可以验证

$$\hat{X}\frac{1}{\hat{X}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(2n+1)!!}[\mathrm{H}_{2n+2}(\hat{X}) + 2(2n+1)\mathrm{H}_{2n}(\hat{X})]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\mathrm{H}_{2n+2}(\hat{X})}{2^{n+1}(2n+1)!!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\mathrm{H}_{2n}(\hat{X})}{2^n(2n-1)!!} + 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\mathrm{H}_{2n+2}(\hat{X})}{2^{n+1}(2n+1)!!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\mathrm{H}_{2n+2}(\hat{X})}{2^{n+1}(2n+1)!!} + 1$$

$$= 1. \tag{7.79}$$

用式(7.11) 的性质和式(7.76)，得到 $\hat{X}^{-n}$ 的正规乘积形式

$$\hat{X}^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{X}}\right)^{n-1}\frac{1}{\hat{X}}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m+3/2)} : \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{X}}\right)^{n-1}\hat{X}^{2m+1} :$$

$$= \sqrt{\pi}(-1)^{n-1}\sum_{m=\left[\frac{n-1}{2}\right]}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m+3/2)}\binom{2m+1}{n-1} : \hat{X}^{2m-n+2} :$$

$$= \sqrt{\pi}(-1)^{n}\sum_{m=\left[\frac{n-1}{2}\right]}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1/2)}\binom{2m+1}{n-1} : \hat{X}^{2m-n} :$$

$$= \sqrt{\pi}(-1)^{n}\sum_{m=\left[\frac{n-1}{2}\right]}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{2m-n}\Gamma(m+1/2)}\binom{2m+1}{n-1} : \mathrm{H}_{2m-n}(\hat{X}). \tag{7.80}$$

特殊地，当 $n = 2$ 时，

$$\frac{1}{X^2} = \sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{\Gamma(n+3/2)}\mathrm{H}_{2n}(X), \tag{7.81}$$

再联合式(7.77)，有

$$\sum_{n=n'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+n'}\mathrm{H}_{2n+1}(X)\mathrm{H}_{2n'+1}(X)}{2^{n+n'}(2n+1)!!(2n'+1)!!}$$

$$= \sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{\Gamma(n+3/2)}\mathrm{H}_{2n}(X). \tag{7.82}$$

### 7.1.5 若干复杂的算符恒等式与积分公式

先求 $:\hat{X}^p:$ 与 $:\hat{X}^q:$ 之积的正规乘积表达式[115]. 由于

$$:\hat{X}^p::\hat{X}^q: = 2^{-(p+q)/2}:(a+a^\dagger)^p::(a+a^\dagger)^q:$$

$$= 2^{-(p+q)/2}\sum_{l=0}^{p}\sum_{k=0}^{q}\frac{p!q!a^{\dagger p-l}a^l a^{\dagger k}a^{q-k}}{(p-l)!l!(q-k)!k!}, \quad (7.83)$$

再利用 $a^l a^{\dagger k}$ 的正规乘积形式(见后详细证明)

$$a^l a^{\dagger k} = \sum_{s=0}^{\min[l,k]}\frac{l!k!a^{\dagger k-s}a^{l-s}}{s!(l-s)!(k-s)!}. \quad (7.84)$$

将式(7.84) 代入式(7.83),有

$$:\hat{X}^p::\hat{X}^q:$$

$$= 2^{-(p+q)/2}p!q!\sum_{l=0}^{p}\sum_{k=0}^{q}\sum_{s=0}^{\min[l,k]}\frac{a^{\dagger p-l+k-s}a^{q-k+l-s}}{(p-l)!(l-s)!s!(q-k)!(k-s)!}$$

$$= 2^{-(p+q)/2}p!q!\sum_{l=0}^{p}\sum_{k=0}^{q}\sum_{s=0}^{\min[l,k]}\binom{p-s}{l-s}\binom{q-s}{k-s}\frac{a^{\dagger p-l+k-s}a^{q-k+l-s}}{s!(p-s)!(q-s)!}$$

$$= p!q!\sum_{s=0}^{\min[p,q]}\frac{:\hat{X}^{p+q-2s}:}{2^s(p-s)!s!(q-s)!}, \quad (7.85)$$

上式给出了 $:\hat{X}^p::\hat{X}^q:$ 的正规乘积形式. 比较双变量 Hermite 多项式的定义

$$\mathrm{H}_{m,n}(\zeta,\xi) = \sum_{l=0}^{\min[m,n]}\frac{(-1)^l m!n!}{l!(m-l)!(n-l)!}\zeta^{m-l}\xi^{n-l}, \quad (7.86)$$

式(7.85) 可以变成紧凑的形式

$$:\hat{X}^p::\hat{X}^q: = \left(\frac{1}{\sqrt{2}\mathrm{i}}\right)^{p+q}:\mathrm{H}_{p,q}(\mathrm{i}\sqrt{2}\hat{X},\mathrm{i}\sqrt{2}\hat{X}):. \quad (7.87)$$

若对式(7.85) 的两边取相干态的平均值,则

$$\langle z|:\hat{X}^p:\int\frac{\mathrm{d}^2z'}{\pi}|z'\rangle\langle z'|:\hat{X}^q:|z\rangle = p!q!\sum_{s=0}^{\min[p,q]}\frac{\langle z|:\hat{X}^{p+q-2s}:|z\rangle}{2^s(p-s)!s!(q-s)!}, \quad (7.88)$$

就得到另一积分公式

$$\int \frac{d^2 z'}{\pi} e^{-|z|^2-|z'|^2+zz'^*+z^*z'}(z'+z^*)^p(z+z'^*)^q$$

$$= p!q! \sum_{s=0}^{\min[p,q]} \frac{(z+z^*)^{p+q-2s}}{(p-s)!s!(q-s)!}. \tag{7.89}$$

利用式(7.85) 和式(7.6),就有

$$\mathrm{H}_p(\hat{X})\mathrm{H}_q(\hat{X}) = p!q! \sum_{s=0}^{\min[p,q]} \frac{2^s \mathrm{H}_{p+q-2s}(\hat{X})}{(p-s)!s!(q-s)!}, \tag{7.90}$$

该等式在文献[116] 利用数学归纳法也已导出. 实际上,直接从式(7.2) 出发,

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{s^p}{p!}\mathrm{H}_p(\hat{X}) \sum_{q=0}^{\infty} \frac{t^q}{q!}\mathrm{H}_q(\hat{X}) = \exp[2(s+t)\hat{X} - t^2 - s^2]$$

$$= :\exp[2(s+t)\hat{X} + 2ts]:, \tag{7.91}$$

得到

$$\mathrm{H}_p(\hat{X})\mathrm{H}_q(\hat{X}) = \frac{\partial^{p+q}}{\partial s^p \partial t^q} :\exp[2(s+t)\hat{X} + 2ts]:\bigg|_{t=s=0}$$

$$= :\frac{\partial^p}{\partial s^p} e^{2s\hat{X}} \frac{\partial^q}{\partial t^q} e^{2t(\hat{X}+s)}:\bigg|_{t=s=0}$$

$$= 2^n : \frac{\partial^p}{\partial s^p}(\hat{X}+s)^q e^{2s\hat{X}}\bigg|_{s=0}:$$

$$= \sum_{s=0}^{\min[p,q]} 2^{p+q-s} s! \binom{p}{s}\binom{q}{s} :\hat{X}^{p+q-2s}:. \tag{7.92}$$

再根据式(7.6),同样得到式(7.85) 或式(7.90). 联合式(7.92),式(7.6) 以及式(7.85),也能导出一新恒等式

$$\mathrm{H}_m(\hat{X})\mathrm{H}_n(\hat{X})\mathrm{H}_r(\hat{X})$$

$$= \sum_{l=0}^{\min[m,n]} 2^{m+n-l+r} l! \binom{m}{l}\binom{n}{l} :\hat{X}^{m+n-2l}::\hat{X}^r:$$

$$= \sum_{l=0}^{\min[m,n]} \sum_{j=0} 2^{n+m-l-j} l! j! \binom{m}{l}\binom{n}{l}\binom{n+m-2l}{j}\binom{r}{j} :\hat{X}^{n+m+r-2l-2j}:$$

$$= \sum_{l=0}^{m} \sum_{j=0} 2^{n+m-l-j} l!j! \binom{m}{l} \binom{n}{l} \binom{n+m-2l}{j} \binom{r}{j} \mathrm{H}_{n+m+r-2l-2j}(\hat{X}). \tag{7.93}$$

另外，利用坐标表象完备性与式(7.6)，有

$$\begin{aligned} 2^{p+q} :\hat{X}^p::\hat{X}^q: &= \mathrm{H}_p(\hat{X})\mathrm{H}_q(\hat{X}) \\ &= \int \mathrm{d}x\, |x\rangle\langle x|\, \mathrm{H}_p(x)\mathrm{H}_q(x) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\pi}} : \mathrm{e}^{-(x-\hat{X})^2} : \mathrm{H}_p(x)\mathrm{H}_q(x) \\ &= p!q! \sum_{s=0}^{\min[q,p]} \frac{2^{p+q} :\hat{X}^{p+q-2s}:}{2^s(p-s)!s!(q-s)!}, \end{aligned} \tag{7.94}$$

因而，可以得到积分公式

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-(x-y)^2} \mathrm{H}_p(x)\mathrm{H}_q(x) = 2^{p+q} p!q! \sum_{s=0}^{\min[q,p]} \frac{y^{p+q-2s}}{2^s(p-s)!s!(q-s)!}. \tag{7.95}$$

特别地，当 $q=0$，$\mathrm{H}_0(x)=1$，式(7.95) 变成了式(7.21)；当 $y=0$ 时，在式(7.95) 的右边仅存在 $2s=p+q$ 的项，这就导出 $(p-s)! = \left(\frac{p-q}{2}\right)!$，$(q-s)! = \left(\frac{q-p}{2}\right)!$，由于它们都在分母里，取 $q=p$，所以式(7.95) 可化简为

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{H}_p(x)\mathrm{H}_q(x) = \delta_{pq} q!2^q, \tag{7.96}$$

进而，从式(7.90) 与式(7.95)，也可导出

$$\begin{aligned} &\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-(x-y)^2} \mathrm{H}_p(x)\mathrm{H}_q(x)\mathrm{H}_r(x) \\ &= p!q! \sum_{n=0}^{\min[p,q]} \frac{2^n}{(p-n)!n!(q-n)!} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-(x-y)^2} \mathrm{H}_{p+q-2n}(x)\mathrm{H}_r(x) \\ &= p!q!r! \sum_{n=0}^{\min[p,q]} \frac{(p+q-2n)!}{(p-n)!n!(q-n)!} \cdot \end{aligned}$$

$$\sum_{s=0} \frac{2^{p+q+r-n-s} y^{p+q+r-2n-2s}}{(p+q-2n-s)!s!(r-s)!}. \tag{7.97}$$

对于 $y=0$ 的情况，有 $p+q+r=2n+2s, n=(p+q-r)/2$，所以

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\pi}} H_p(x) H_q(x) H_r(x) e^{-x^2}$$

$$= \frac{2^{(p+q+r)/2} p!q!r!}{\left(\frac{p+q-r}{2}\right)!\left(\frac{q+r-p}{2}\right)!\left(\frac{p+r-q}{2}\right)!}. \tag{7.98}$$

注意这里 $p+q+r$ 是偶数，$p,q,r$ 中任两个之和不能比第三个小.

最后，根据式(7.33)，式(7.95) 以及坐标本征态完备性，也可以导出新的算符公式

$$\hat{X}^n H_p(\hat{X}) = \int \frac{dx}{\sqrt{\pi}} x^n H_p(x) :e^{-(x-\hat{X})^2}:$$

$$= \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!}{2^n k!(n-2k)!} \int \frac{dx}{\sqrt{\pi}} H_{n-2k}(x) H_p(x) :e^{-(x-\hat{X})^2}:$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!p!}{2^n k!} \sum_{s=0} \frac{:\hat{X}^{n-2k+p-2s}:}{2^s (p-s)!s!(n-2k-s)!}. \tag{7.99}$$

### 7.1.6 $(\mu a+\nu a^\dagger)^m$ 与 $H_m(\mu a+\nu a^\dagger)$ 的正规乘积与反正规乘积形式

这里，利用 Hermite 多项式的产生函数与 Baker-Hausdorff 公式直接导出 $(\mu a+\nu a^\dagger)^m$ 的正规乘积与反正规乘积[117]，其中 $a,a^\dagger$ 分别是玻色湮灭算符与产生算符，$\mu,\nu$ 是实参数. 为了方便起见，设 $\Omega \equiv \mu a+\nu a^\dagger$. 根据式(7.2) 与式(7.4)，也很容易得到

$$e^{\lambda\Omega} = :\exp\left(\lambda\Omega + \frac{1}{2}\lambda^2\mu\nu\right):$$

$$= :\exp\left[2\left(-i\sqrt{\frac{\mu\nu}{2}}\lambda\right)\frac{i\Omega}{\sqrt{2\mu\nu}} - \left(-i\sqrt{\frac{\mu\nu}{2}}\lambda\right)^2\right]:$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\mu\nu}{2}}\lambda\right)^m}{m!} : \mathrm{H}_m\left(\frac{\mathrm{i}\Omega}{\sqrt{2\mu\nu}}\right):, \tag{7.100}$$

这里已考虑对易关系$[a,a^\dagger]=1$. 将式(7.100)与 $\mathrm{e}^{\lambda\Omega}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}\Omega^m$ 相同的$\lambda$幂指数,得到一个较简洁的公式

$$\Omega^m = \left(-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\mu\nu}{2}}\right)^m : \mathrm{H}_m\left(\frac{\mathrm{i}\Omega}{\sqrt{2\mu\nu}}\right):, \tag{7.101}$$

即

$$(\mu a+\nu a^\dagger)^m = \left(-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\mu\nu}{2}}\right)^m : \mathrm{H}_m\left(\mathrm{i}\frac{\mu a+\nu a^\dagger}{\sqrt{2\mu\nu}}\right):. \tag{7.102}$$

当引入$\mu=\frac{f-\mathrm{i}g}{\sqrt{2}}$和$\nu=\frac{f+\mathrm{i}g}{\sqrt{2}}$,这样就能将式(7.102)改写为

$$(f\hat{X}+g\hat{P})^m = \left(\frac{\sqrt{f^2+g^2}}{2\mathrm{i}}\right)^m : \mathrm{H}_m\left(\mathrm{i}\frac{f\hat{X}+g\hat{P}}{\sqrt{f^2+g^2}}\right):, \tag{7.103}$$

式中:坐标算符$\hat{X}=\frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}$与动量算符$\hat{P}=\frac{a-a^\dagger}{\mathrm{i}\sqrt{2}}$,该结果与文献[118 ~ 120]中结果是一致的. 特别地,当$f=1$和$g=0$,就变成了$\hat{X}^m$的正规乘积形式式(7.25). 当$f=0$和$g=1$,动量算符$\hat{P}^m$的正规乘积形式为

$$\hat{P}^m = \left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^m : \mathrm{H}_m(\mathrm{i}\hat{P}):. \tag{7.104}$$

作为式(7.102)的应用,光子增加压缩真空态[121,122] $|r,m\rangle_+$可表示为

$$\begin{aligned}|r,m\rangle_+ &= a^{\dagger m}S(r)\,|0\rangle \\ &= S(r)S^\dagger(r)a^{\dagger m}S(r)\,|0\rangle\end{aligned}$$

$$=S(r)(a^{\dagger}\cosh r+a\sinh r)^{m}\;|0\rangle$$

$$=S(r)\left(-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\sinh 2r}{4}}\right)^{m}\;\vdots\;\mathrm{H}_{m}\left(\mathrm{i}\sqrt{\frac{\tanh r}{2}}a+\right.$$

$$\left.\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2\tanh r}}a^{\dagger}\right)\vdots\;|0\rangle$$

$$=\left(-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\sinh 2r}{4}}\right)^{m}S(r)\mathrm{H}_{m}\left(\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2\tanh r}}a^{\dagger}\right)|0\rangle,\tag{7.105}$$

这就说明光子增加压缩真空态可以看成压缩 Hermite 多项式态. 同样地,对于光子扣除压缩真空态[123,124] $|r,m\rangle_{-}$ 也可表示为

$$|r,m\rangle_{-}=\left(-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\sinh 2r}{4}}\right)^{m}S(r)\mathrm{H}_{m}\left(\mathrm{i}\sqrt{\frac{\tanh r}{2}}a^{\dagger}\right)|0\rangle.\tag{7.106}$$

用类似的方法,也可以得到$(\mu a+\nu a^{\dagger})^{m}$ 的反正规乘积形式. 也利用式(7.2) 与式(7.4),有

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\lambda\Omega}&=\;\vdots\;\mathrm{e}^{\lambda\Omega-\frac{1}{2}\lambda^{2}\mu\nu}\;\vdots\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{\mu\nu}{2}}\lambda\right)^{m}}{m!}\;\vdots\;\mathrm{H}_{m}\left(\frac{\Omega}{\sqrt{2\mu\nu}}\right)\vdots\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^{m}}{m!}\Omega^{m}.\end{aligned}\tag{7.107}$$

从式(7.107) 可以看出

$$\Omega^{m}=\left(\sqrt{\frac{\mu\nu}{2}}\right)^{m}\;\vdots\;\mathrm{H}_{m}\left(\frac{\Omega}{\sqrt{2\mu\nu}}\right)\vdots\;,\tag{7.108}$$

即

$$(\mu a+\nu a^{\dagger})^{m}=\left(\sqrt{\frac{\mu\nu}{2}}\right)^{m}\;\vdots\;\mathrm{H}_{m}\left(\frac{\mu a+\nu a^{\dagger}}{\sqrt{2\mu\nu}}\right)\vdots\;,\tag{7.109}$$

这也是$(\mu a+\nu a^{\dagger})^{m}$或$(f\hat{X}+g\hat{P})^{m}$的反正规乘积展开形式. 根据式(7.109),如果 $f=1$ 和 $g=0$,即 $\mu=\nu=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\hat{X}^m = \left(\frac{1}{2}\right)^m \vdots \mathrm{H}_m(\hat{X}) \vdots . \qquad (7.110)$$

当 $f=0$ 和 $g=1$，即 $\mu=-\nu=\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{2}}$，

$$\hat{P}^m = \left(\frac{1}{2}\right)^m \vdots \mathrm{H}_m(\hat{P}) \vdots . \qquad (7.111)$$

下面导出 $\mathrm{H}_m(\mu a+\nu a^\dagger)$ 的正规乘积与反正规乘积形式. 从式(7.2) 与式(7.4)，易有

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\mathrm{H}_m(\mu a+\nu a^\dagger) \\
&= \exp[2t(\mu a+\nu a^\dagger)-t^2] \\
&=:\exp\left[2\sqrt{1-2\mu\nu}t\,\frac{\mu a+\nu a^\dagger}{\sqrt{1-2\mu\nu}}-(\sqrt{1-2\mu\nu}t)^2\right]: \\
&=:\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{1-2\mu\nu}t)^m}{m!}\mathrm{H}_m\left(\frac{\mu a+\nu a^\dagger}{\sqrt{1-2\mu\nu}}\right):. \qquad (7.112)
\end{aligned}$$

比较式(7.112) 两边的 $t$ 相同次幂能导出

$$\mathrm{H}_m(\mu a+\nu a^\dagger) = (\sqrt{1-2\mu\nu})^m : \mathrm{H}_m\left(\frac{\mu a+\nu a^\dagger}{\sqrt{1-2\mu\nu}}\right):. \qquad (7.113)$$

当取 $\mu=\frac{f-\mathrm{i}g}{\sqrt{2}}$ 和 $\nu=\frac{f+\mathrm{i}g}{\sqrt{2}}$，上式就变成了

$$\mathrm{H}_m(f\hat{X}+g\hat{P}) = (\sqrt{1-f^2-g^2})^m : \mathrm{H}_m\left(\frac{f\hat{X}+g\hat{P}}{\sqrt{1-f^2-g^2}}\right):. \qquad (7.114)$$

注意在式(7.112) 的第二步，要求 $1-2\mu\nu\neq0$. 而对于 $1-2\mu\nu=0$ 这种情况，为

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\mathrm{H}_m(\mu a+\nu a^\dagger) &=: \exp[2t(\mu a+\nu a^\dagger)]: \\
&=:\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2t)^m(\mu a+\nu a^\dagger)^m}{m!}:. \qquad (7.115)
\end{aligned}$$

从上式，可得

$$\mathrm{H}_m(\mu a+\nu a^\dagger)=2^m:(\mu a+\nu a^\dagger)^m:, \tag{7.116}$$

它的特殊形式，对 $\mu=\nu=\frac{1}{\sqrt{2}}$，就是式(7.6)的结果. 对$\mu=-\nu=\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{2}}$，

$$\mathrm{H}_m(\hat{P})=2^m:\hat{P}^m:. \tag{7.117}$$

类似的，$\mathrm{H}_m(\mu a+\nu a^\dagger)$ 的反正规乘积展开式为

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\mathrm{H}_m(\mu a+\nu a^\dagger)&=\vdots\exp\left[2\sqrt{1+2\mu\nu}t\,\frac{\mu a+\nu a^\dagger}{\sqrt{1+2\mu\nu}}-(\sqrt{1+2\mu\nu}t)^2\right]\vdots\\&=\vdots\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{1+2\mu\nu}t)^m}{m!}\mathrm{H}_m\left(\frac{\mu a+\nu a^\dagger}{\sqrt{1+2\mu\nu}}\right)\vdots,\end{aligned} \tag{7.118}$$

则

$$\mathrm{H}_m(\mu a+\nu a^\dagger)=(\sqrt{1+2\mu\nu})^m\vdots\mathrm{H}_m\left(\frac{\mu a+\nu a^\dagger}{\sqrt{1+2\mu\nu}}\right)\vdots. \tag{7.119}$$

当 $\mu=\frac{f-\mathrm{i}g}{\sqrt{2}}$ 和 $\nu=\frac{f+\mathrm{i}g}{\sqrt{2}}$，式(7.119)变为

$$\mathrm{H}_m(f\hat{X}+g\hat{P})=(\sqrt{1+f^2+g^2})^m\vdots\mathrm{H}_m\left(\frac{(f\hat{X}+g\hat{P})}{(\sqrt{1+f^2+g^2})}\right)\vdots, \tag{7.120}$$

这就是一个新的算符恒等式. 作为上式的特例，当 $\mu=\nu=\frac{1}{\sqrt{2}}$，

$$\mathrm{H}_m(\hat{X})=2^{m/2}\vdots\mathrm{H}_m\left(\frac{\hat{X}}{\sqrt{2}}\right)\vdots; \tag{7.121}$$

当 $\mu=-\nu=\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{2}}$，

$$\mathrm{H}_m(\hat{P}) = 2^{m/2} \vdots \mathrm{H}_m\left(\frac{\hat{P}}{\sqrt{2}}\right) \vdots . \tag{7.122}$$

### 7.1.7 有关 Hermite 多项式的若干新积分公式

借助交替使用正规、反正规以及 Weyl 编序算符内积分技术，推导出一些新的有关 Hermite 多项式的积分公式[125]. 这开辟了一种依靠量子力学算符编序的技术求解一些复杂数学积分公式的新途径，甚至根本无需真正进行积分.

首先，考虑相干态 $|\beta\rangle$ 中的 $P$ 表示

$$\rho = \int \frac{d^2\beta}{\pi} P(\beta) |\beta\rangle\langle\beta|, \quad \beta \equiv \beta_1 + i\beta_2, \tag{7.123}$$

其中：

$$|\beta\rangle = \exp\left(-\frac{|\beta|^2}{2} + \beta a^\dagger\right)|0\rangle, \tag{7.124}$$

它满足 $a|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle$. 利用式(7.25)，式(7.110)，式(7.123) 以及 $|0\rangle\langle 0| = :\exp(-a^\dagger a):$，有

$$\begin{aligned}\hat{X}^n &= 2^{-n}\int \frac{d^2\beta}{\pi}\mathrm{H}_n\left(\frac{\beta+\beta^*}{\sqrt{2}}\right)|\beta\rangle\langle\beta| \\ &= 2^{-n}\int \frac{d^2\beta}{\pi}\mathrm{H}_n(\sqrt{2}\beta_1) :\exp(-|\beta|^2 + \beta a^\dagger + \beta^* a - a^\dagger a): \\ &= (2i)^{-n} :\mathrm{H}_n(i\hat{X}):,\end{aligned} \tag{7.125}$$

由于在正规乘积 :: 内，$a$ 和 $a^\dagger$ 是相互对易的且看作参数进行积分. 所以，令 $a \to x$ 与 $a^\dagger \to y$，直接从式(7.125) 得到

$$\int \frac{d^2\beta}{\pi}\mathrm{H}_n(\sqrt{2}\beta_1)\exp(-|\beta|^2 + y\beta + x\beta^*) = i^{-n}\mathrm{H}_n\left(i\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)e^{xy}, \tag{7.126}$$

这是一个新的积分公式，不容易用通常数学积分而得. 从而看出，这也是 IWOP 技术的一个明显优点.

其次，密度算符 $\rho$ 的反正规乘积展开式[31]

$$\rho = \int \frac{d^2\beta}{\pi} \vdots \langle -\beta| \rho |\beta\rangle \exp(|\beta|^2 + \beta^* a - \beta a^\dagger + a^\dagger a) \vdots . \tag{7.127}$$

它告诉我们，一旦$\rho$的相干态矩阵元$\langle -\beta| \rho |\beta\rangle$已知，就可在$\vdots\ \vdots$内积分直接给出$\rho$的反正规乘积形式. 因而，根据式(7.25)，式(7.127)以及式(7.110)，可得到下面的方程：

$$\begin{aligned}\hat{X}^n &= (2i)^{-n}\int \frac{d^2\beta}{\pi} \vdots \langle -\beta| : H_n(i\hat{X}) : |\beta\rangle \exp(|\beta|^2 + \beta^* a - \\ &\quad \beta a^\dagger + a^\dagger a) \vdots \\ &= (2i)^{-n}\int \frac{d^2\beta}{\pi} \vdots H_n(-\sqrt{2}\beta_2) \exp(-|\beta|^2 + \beta^* a - \beta a^\dagger + a^\dagger a) \vdots \\ &= 2^{-n} \vdots H_n(\hat{X}) \vdots . \end{aligned} \tag{7.128}$$

从式(7.128)就有

$$\int \frac{d^2\beta}{\pi} H_n(-\sqrt{2}\beta_2) \exp(-|\beta|^2 + x\beta^* - \beta y) = i^n H_n\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) e^{-xy}, \tag{7.129}$$

这不同于式(7.126).

另一方面，前面已经给出了密度算符$\rho$的 Weyl 编序展开式

$$\rho = 2\int \frac{d^2\beta}{\pi} \vdots \langle -\beta| \rho |\beta\rangle \exp[2(\beta^* a - a^\dagger\beta + a^\dagger a)] \vdots, \tag{7.130}$$

在$\vdots\ \vdots$内$a$与$a^\dagger$也是对易的. 由式(7.6)与式(7.130)可导出

$$\begin{aligned}H_n(\hat{X}) &= 2^{n+1}\int \frac{d^2\beta}{\pi} \vdots \langle -\beta| : \hat{X}^n : |\beta\rangle \exp[2(\beta^* a - a^\dagger\beta + a^\dagger a)] \vdots \\ &= i^n 2^{\frac{3n+2}{2}} \int \frac{d^2\beta}{\pi} \vdots \beta_2^n \exp[2(-|\beta|^2 + \beta^* a - a^\dagger\beta + a^\dagger a)] \vdots . \end{aligned} \tag{7.131}$$

由于

$$H_n(\hat{X}) = \vdots H_n(\hat{X}) \vdots, \tag{7.132}$$

将式(7.131)与式(7.132)联立，便得到新的积分公式

$$\int \frac{d^2\beta}{\pi}\beta_2^n \exp[2(-|\beta|^2 + x\beta^* - y\beta)] = i^{-n}2^{-\frac{3n+2}{2}} H_n\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)e^{-2xy}, \tag{7.133}$$

这里也不需要真正的数学积分.

最后,用同样的方法,对于动量 $P = \frac{a - a^\dagger}{i\sqrt{2}}$ 以及式(7.104),式(7.111),式(7.122) 和式(7.117),可导出如下积分公式:

$$\int \frac{d^2\beta}{\pi} H_n(\sqrt{2}\beta_2)\exp(-|\beta|^2 + y\beta + x\beta^*) = i^{-n} H_n\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)e^{xy}, \tag{7.134}$$

$$\int \frac{d^2\beta}{\pi} H_n(\sqrt{2}\beta_1)\exp(-|\beta|^2 + x\beta^* - y\beta) = i^n H_n\left(\frac{x-y}{i\sqrt{2}}\right)e^{-xy}, \tag{7.135}$$

$$\int \frac{d^2\beta}{\pi}\beta_1^n \exp[2(-|\beta|^2 + \beta^* x - y\beta)] = (-i)^{-n}2^{-\frac{3n+2}{2}} H_n\left(\frac{x-y}{i\sqrt{2}}\right)e^{-2xy}. \tag{7.136}$$

## 7.2 有关 Laguerre 多项式的算符恒等式

如果式(7.58) 与 Laguerre 多项式的母函数

$$(1-t)^{-\alpha-1}\exp\left(\frac{xt}{t-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x)t^n \tag{7.137}$$

相比较,可以看出当 $\alpha = -1/2$,有

$$:\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{-1/2}(-\hat{X}^2)\lambda^n : = e^{\lambda\hat{X}^2}, \tag{7.138}$$

这是一个新的算符恒等式. 然后,与 $e^{\lambda\hat{X}^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\hat{X}^{2n}$ 比较,即有

$$\hat{X}^{2n} = n!:L_n^{-1/2}(-\hat{X}^2):, \tag{7.139}$$

根据 $\hat{X}^{2n} = (2i)^{-2n} : H_{2n}(i\hat{X}):$,可以得到 Hermite 多项式与

Laguerre(拉盖尔) 多项式之间的关系：

$$\mathrm{H}_{2n}(\mathrm{i}\,\hat{X}) = (-1)^n 2^{2n} n!\,\mathrm{L}_n^{-1/2}(-\hat{X}^2), \tag{7.140}$$

这对 $\mathrm{i}X \to x$ 仍然不变，即

$$\mathrm{H}_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} n!\,\mathrm{L}_n^{-1/2}(x^2), \tag{7.141}$$

与文献[126] 是一致的. 由于 $\mathrm{H}_{2n}(\hat{X}) = 2^{2n} : \hat{X}^{2n} :$，有

$$: \hat{X}^{2n} := (-1)^n n!\,\mathrm{L}_n^{-1/2}(\hat{X}^2), \tag{7.142}$$

注意式(7.142) 不同于式(7.139). 进而，从式(7.58) 与式(7.137)，有

$$(1-t)^{-\alpha-1}\exp\left(\frac{\hat{X}^2 t}{t-1}\right) = (1-t)^{-\alpha-1/2} : \exp(-t\hat{X}^2) :$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{L}_n^{\alpha}(\hat{X}^2) t^n. \tag{7.143}$$

另外，有

$$: (-\hat{X}^2)^n : = \frac{\partial^n}{\partial t^n} : \exp(-t\hat{X}^2) : \Big|_{t=0}$$
$$= : \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{L}_m^{\alpha}(\hat{X}^2) \frac{\partial^n}{\partial t^n}[t^m (1-t)^{\alpha+1/2}] : \Big|_{t=0}$$
$$= : \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{L}_m^{\alpha}(\hat{X}^2) \sum_l \binom{n}{l} \left(\frac{\partial^{n-l}}{\partial t^{n-l}} t^m\right) \frac{\partial^l}{\partial t^l}(1-t)^{\alpha+1/2} : \Big|_{t=0}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \mathrm{L}_m^{\alpha}(\hat{X}^2) \binom{n}{n-m} (-1)^{n-m} \binom{\alpha+1/2}{n-m} (n-m)!. \tag{7.144}$$

特别地，在式(7.143) 或式(7.144)，当 $\alpha = 1/2$，有

$$: \exp[-t\hat{X}^2] : = : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}(-\hat{X}^2)^n : = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{L}_n^{1/2}(\hat{X}^2) t^n (1-t). \tag{7.145}$$

比较上式中 $t^n$ 的项并利用式(7.143)，就可以得到

$$: (-\hat{X}^2)^n : = n!\,[\mathrm{L}_n^{1/2}(\hat{X}^2) - \mathrm{L}_{n-1}^{1/2}(\hat{X}^2)]. \tag{7.146}$$

再联合式(7.145)与式(7.142),可以导出

$$\mathrm{L}_n^{1/2}(\hat{X}^2)-\mathrm{L}_{n-1}^{1/2}(\hat{X}^2)=\mathrm{L}_n^{-1/2}(\hat{X}^2). \tag{7.147}$$

利用式(7.127),式(7.142)和式(7.110),有

$$\begin{aligned}\hat{X}^{2n}&=n!\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\vdots\langle-\beta|:\mathrm{L}_n^{-1/2}(-\hat{X}^2):|\beta\rangle\mathrm{e}^{|\beta|^2+\beta^*a-\beta a^\dagger+a^\dagger a}\vdots\\&=n!\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\vdots\mathrm{L}_n^{-1/2}(2\beta_2^2)\mathrm{e}^{-|\beta|^2+\beta^*a-\beta a^\dagger+a^\dagger a}\vdots\\&=2^{-2n}\vdots\mathrm{H}_{2n}(\hat{X})\vdots,\end{aligned} \tag{7.148}$$

当 $a\to x$ 以及 $a^\dagger\to y$,得到如下积分公式:

$$\begin{aligned}&n!\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\mathrm{L}_n^{-1/2}(2\beta_2^2)\exp(-|\beta|^2+x\beta^*-y\beta)\\&=2^{-2n}\mathrm{H}_{2n}\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{e}^{-xy}.\end{aligned} \tag{7.149}$$

再考虑式(7.130)和式(7.142),得到

$$\begin{aligned}(-1)^n n!\mathrm{L}_n^{-1/2}(\hat{X}^2)&=2\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\vdots\langle-\beta|:\hat{X}^{2n}:|\beta\rangle\mathrm{e}^{2(\beta^*a-a^\dagger\beta+a^\dagger a)}\vdots\\&=(-1)^n2^{n+1}\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\vdots\beta_2^{2n}\mathrm{e}^{2(-|\beta|^2+\beta^*a-a^\dagger\beta+a^\dagger a)}\vdots\\&=(-1)^n n!\vdots\mathrm{L}_n^{-1/2}(\hat{X}^2)\vdots,\end{aligned} \tag{7.150}$$

即

$$\begin{aligned}&2^{n+1}\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\beta_2^{2n}\vdots\exp[2(-|\beta|^2+\beta^*a-a^\dagger\beta+a^\dagger a)]\vdots\\&=n!\vdots\mathrm{L}_n^{-1/2}(\hat{X}^2)\vdots.\end{aligned} \tag{7.151}$$

也有

$$\begin{aligned}&2^{n+1}\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\beta_2^{2n}\exp[2(-|\beta|^2+x\beta^*-y\beta)]\\&=n!\mathrm{L}_n^{-1/2}\left[\frac{1}{2}(x+y)^2\right]\mathrm{e}^{-2xy}.\end{aligned} \tag{7.152}$$

## 7.3 有关双变量 Hermite 多项式的算符恒等式与积分公式

首先，介绍一下双变量厄米多项式 $\mathrm{H}_{m,n}(\zeta,\xi)$ 的产生函数为

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{t^m\tau^n}{m!n!}\mathrm{H}_{m,n}(\zeta,\xi)=\exp(-t\tau+t\zeta+\tau\xi),\quad(7.153)$$

或者

$$\mathrm{H}_{m,n}(\zeta,\xi)=\frac{\partial^{m+n}}{\partial t^m\partial\tau'^n}\exp(-t\tau+t\zeta+\tau\xi)\bigg|_{t=\tau=0}.\quad(7.154)$$

从式(7.4)，很容易得到

$$\mathrm{e}^{\hat{A}}\mathrm{e}^{\hat{B}}=\mathrm{e}^{\hat{B}}\mathrm{e}^{\hat{A}}\mathrm{e}^{[\hat{A},\hat{B}]}.\quad(7.155)$$

根据式(7.153)与式(7.155)，就有

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\tau a}\mathrm{e}^{ta^\dagger}&=:\exp(\tau a+ta^\dagger+t\tau):\\&=:\exp[-\mathrm{i}\tau(\mathrm{i}a)+(-\mathrm{i}t)\mathrm{i}a^\dagger-(-\mathrm{i}t)(-\mathrm{i}\tau)]:\\&=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i}t)^m(-\mathrm{i}\tau)^n}{m!n!}:\mathrm{H}_{m,n}(\mathrm{i}a^\dagger,\mathrm{i}a):.\end{aligned}\quad(7.156)$$

然后，将式(7.156)与

$$\mathrm{e}^{\tau a}\mathrm{e}^{ta^\dagger}=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\tau a)^n}{n!}\frac{(ta^\dagger)^m}{m!}=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\tau^n t^m}{n!m!}a^n a^{\dagger m}\quad(7.157)$$

进行比较有

$$a^n a^{\dagger m}=(-\mathrm{i})^{m+n}:\mathrm{H}_{m,n}(\mathrm{i}a^\dagger,\mathrm{i}a):,\quad(7.158)$$

上式就是 $a^n a^{\dagger m}$ 的正规乘积形式[117]，该公式是易于记忆的.

类似地，通过

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{ta^\dagger}\mathrm{e}^{\tau a}&=\vdots\exp[\tau a+ta^\dagger-t\tau]\vdots\\&=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{t^m\tau^n}{m!n!}\vdots\mathrm{H}_{m,n}(a^\dagger,a)\vdots\\&=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{t^m\tau^n}{n!m!}a^{\dagger m}a^n,\end{aligned}\quad(7.159)$$

也可以得到 $a^{\dagger m}a^n$ 的反正规乘积形式

$$a^{\dagger m}a^n = \vdots\, \mathrm{H}_{m,n}(a^\dagger,a) \,\vdots\,, \tag{7.160}$$

式(7.158)与式(7.160)的结果完全与文献[127]一致. 下面列出有关式(7.158)与式(7.160)的结果的应用.

(1) 导出一些恒等式. 例如:

$$a^l a^{\dagger m}a^n = (-\mathrm{i})^{m+l} :\mathrm{H}_{m,l}(\mathrm{i}a^\dagger,\mathrm{i}a)a^n: = \,\vdots\, a^l \mathrm{H}_{m,n}(a^\dagger,a) \,\vdots\,. \tag{7.161}$$

根据式(7.158)的结果,有

$$a^n a^{\dagger k}a^j a^{\dagger m} = (-\mathrm{i})^{k+n+j+m} :\mathrm{H}_{k,n}(\mathrm{i}a^\dagger,\mathrm{i}a)::\mathrm{H}_{m,j}(\mathrm{i}a^\dagger,\mathrm{i}a):. \tag{7.162}$$

另一方面,根据式(7.160)以及定义式(7.86),得

$$\begin{aligned} a^n a^{\dagger k}a^j a^{\dagger m} &= a^n \,\vdots\, \mathrm{H}_{k,j}(a^\dagger,a) \,\vdots\, a^{\dagger m} \\ &= \sum_{l=0}^{\min[k,j]} \frac{(-1)^l k!j!}{l!(k-l)!(j-l)!} a^{n+j-l}a^{\dagger m+k-l} \\ &= \sum_{l=0}^{\min[k,j]} \frac{(-\mathrm{i})^{k+n+j+m} k!j!}{l!(k-l)!(j-l)!} :\mathrm{H}_{m+k-l,n+j-l}(\mathrm{i}a^\dagger,\mathrm{i}a):, \end{aligned} \tag{7.163}$$

联合式(7.162)与式(7.163),得

$$\begin{aligned} &:\mathrm{H}_{k,n}(\mathrm{i}a^\dagger,\mathrm{i}a)::\mathrm{H}_{m,j}(\mathrm{i}a^\dagger,\mathrm{i}a): \\ &= \sum_{l=0}^{\min[k,j]} \frac{k!j!}{l!(k-l)!(j-l)!} :\mathrm{H}_{m+k-l,n+j-l}(\mathrm{i}a^\dagger,\mathrm{i}a):. \end{aligned} \tag{7.164}$$

同样的方法,有

$$\begin{aligned} a^{\dagger m}a^n a^{\dagger k}a^j &= (-\mathrm{i})^{k+n} :a^{\dagger m}\mathrm{H}_{k,n}(\mathrm{i}a^\dagger,\mathrm{i}a)a^j: \\ &= \sum_{l=0}^{\min[k,n]} \frac{(-1)^l k!n!}{l!(k-l)!(n-l)!} a^{\dagger m+k-l}a^{n-l+j} \\ &= \sum_{l=0}^{\min[k,n]} \frac{(-1)^l k!n!}{l!(k-l)!(n-l)!} \,\vdots\, \mathrm{H}_{m+k-l,n-l+j}(a^\dagger,a) \,\vdots \\ &= \,\vdots\, \mathrm{H}_{m,n}(a^\dagger,a) \,\vdots\,\vdots\, \mathrm{H}_{k,j}(a^\dagger,a) \,\vdots\,, \end{aligned} \tag{7.165}$$

即

$$\vdots \mathrm{H}_{m,n}(a^{\dagger},a) \vdots \vdots \mathrm{H}_{k,j}(a^{\dagger},a) \vdots$$
$$= \sum_{l=0}^{\min[k,n]} \frac{(-1)^{l} k!n!}{l!(k-l)!(n-l)!} \vdots \mathrm{H}_{m+k-l,n-l+j}(a^{\dagger},a) \vdots . \tag{7.166}$$

(2) 导出一些积分公式. 从相干态完备性的正规乘积形式：

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} |z\rangle\langle z| = \int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} :\exp(-|z|^2 + za^{\dagger} + z^{*}a - a^{\dagger}a): = 1, \tag{7.167}$$

有

$$a^n a^{\dagger m} = \int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} a^n |z\rangle\langle z| a^{\dagger m}$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} z^n z^{*m} :\exp(-|z|^2 + za^{\dagger} + z^{*}a - a^{\dagger}a):, \tag{7.168}$$

再由式(7.158)，得

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} z^n z^{*m} :\exp(-|z|^2 + za^{\dagger} + z^{*}a - a^{\dagger}a):$$
$$= (-\mathrm{i})^{m+n} :\mathrm{H}_{m,n}(\mathrm{i}a^{\dagger},\mathrm{i}a):. \tag{7.169}$$

因为在 :: 内 $a$ 与 $a^{\dagger}$是相互对易的，它们可以当成 $c$ 数看待. 将 $a^{\dagger} \to \xi$ 和 $a \to \eta$，容易得到下面的积分公式：

$$\mathrm{H}_{m,n}(\mathrm{i}\xi,\mathrm{i}\eta) = \mathrm{i}^{m+n}\mathrm{e}^{-\xi\eta}\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} z^n z^{*m} \exp(-|z|^2 + \xi z + \eta z^{*}). \tag{7.170}$$

或者取 $\mathrm{i}a^{\dagger} \to \xi$ 和 $\mathrm{i}a \to \eta$，有

$$\mathrm{H}_{m,n}(\xi,\eta) = (-1)^{m}\mathrm{e}^{\xi\eta}\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} z^n z^{*m} \exp(-|z|^2 - \xi z + \eta z^{*}), \tag{7.171}$$

$$\mathrm{H}_{m,n}(\xi,\eta) = (-1)^{n}\mathrm{e}^{\xi\eta}\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} z^n z^{*m} \exp(-|z|^2 + \xi z - \eta z^{*}). \tag{7.172}$$

这个积分公式经常被用到[128,129]. 再根据量子光学中在相干态 $|z\rangle$ 的 $P$ 表示,得

$$\rho = \int \frac{d^2 z}{\pi} P(z) \ |z\rangle\langle z| , \tag{7.173}$$

用式(7.160) 和式(7.167),就能够导出如下等式:

$$\begin{aligned} \vdots \mathrm{H}_{m,n}(a^\dagger,a) \vdots &= \int \frac{d^2 z}{\pi} \mathrm{H}_{m,n}(z^*, z) \ |z\rangle\langle z| \\ &= \int \frac{d^2 z}{\pi} \mathrm{H}_{m,n}(z^*, z) : \exp[-|z|^2 + z^* a + \\ &\quad za^\dagger - a^\dagger a] : \\ &= a^{\dagger m} a^n . \end{aligned} \tag{7.174}$$

当 $a \rightarrow \eta$ 与 $a^\dagger \rightarrow \zeta^*$,则

$$\int \frac{d^2 z}{\pi} \mathrm{H}_{m,n}(z^*, z) : \exp[-(z^* - \zeta^*)(z - \eta)] = \zeta^{*m} \eta^n . \tag{7.175}$$

(3) 导出有关双变量厄米多项式递推关系. 根据式(7.158) 和式(7.160) 的结果,有

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} a^n a^{\dagger m} &= n a^{n-1} a^{\dagger m} \\ &= n(-\mathrm{i})^{m+n-1} : \mathrm{H}_{m,n-1}(\mathrm{i}a^\dagger, \mathrm{i}a) : \\ &= \frac{d}{da} (-\mathrm{i})^{m+n} : \mathrm{H}_{m,n}(\mathrm{i}a^\dagger, \mathrm{i}a) : , \end{aligned} \tag{7.176}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{da^\dagger} a^{\dagger m} a^n &= m a^{\dagger m-1} a^n \\ &= m \vdots \mathrm{H}_{m-1,n}(a^\dagger, a) \vdots \\ &= \frac{d}{da^\dagger} \vdots \mathrm{H}_{m,n}(a^\dagger, a) \vdots , \end{aligned} \tag{7.177}$$

很容易看出

$$\frac{d}{d\xi} H_{m,n}(\xi, \eta) = m \mathrm{H}_{m-1,n}(\xi, \eta), \tag{7.178}$$

$$\frac{d}{d\eta} H_{m,n}(\xi, \eta) = n \mathrm{H}_{m,n-1}(\xi, \eta). \tag{7.179}$$

此外，由$[a^\dagger, a^n] = -na^{n-1}$ 和$[a, a^{\dagger m}] = ma^{\dagger m-1}$，得

$$a^{\dagger m+1}a^n = a^{\dagger m}a^n a^\dagger - na^{\dagger m}a^{n-1}, \tag{7.180}$$

$$a^{\dagger m}a^{n+1} = aa^{\dagger m}a^n - ma^{\dagger m-1}a^n. \tag{7.181}$$

再考虑式(7.160)，很容易得到

$$\vdots \mathrm{H}_{m+1,n}(a^\dagger, a) \vdots = \vdots \mathrm{H}_{m,n}(a^\dagger, a) \vdots a^\dagger - n \vdots \mathrm{H}_{m,n-1}(a^\dagger, a) \vdots, \tag{7.182}$$

$$\vdots \mathrm{H}_{m,n+1}(a^\dagger, a) \vdots = a \vdots \mathrm{H}_{m,n}(a^\dagger, a) \vdots - m \vdots \mathrm{H}_{m-1,n}(a^\dagger, a) \vdots, \tag{7.183}$$

这就得到了 $\mathrm{H}_{m,n}(\xi, \eta)$ 的有名递推关系($a^\dagger \to \xi, a \to \eta$)

$$\mathrm{H}_{m+1,n}(\xi, \eta) - \xi\mathrm{H}_{m,n}(\xi, \eta) + n\mathrm{H}_{m,n-1}(\xi, \eta) = 0, \tag{7.184}$$

$$\mathrm{H}_{m,n+1}(\xi, \eta) - \eta\mathrm{H}_{m,n}(\xi, \eta) + m\mathrm{H}_{m-1,n}(\xi, \eta) = 0. \tag{7.185}$$

## 7.4 用纠缠态表象导出双变量 Hermite 多项式的算符恒等式与积分公式

下面，还可以在纠缠态表象中推广以上的一些公式[130]. 首先回顾一下纠缠态表象 $|\xi\rangle$[67]

$$|\xi\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\xi|^2 + \xi a^\dagger + \xi^* b^\dagger - a^\dagger b^\dagger\right)|00\rangle$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\xi|^2} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{a^{\dagger m} b^{\dagger n}}{m!n!} \mathrm{H}_{m,n}(\xi, \xi^*)|00\rangle \tag{7.186}$$

满足

$$(a + b^\dagger)|\xi\rangle = \xi|\xi\rangle, \quad (a^\dagger + b)|\xi\rangle = \xi^*|\xi\rangle, \tag{7.187}$$

或者

$$(\hat{X} + \hat{Y})|\xi\rangle = \sqrt{2}\xi_1|\xi\rangle, \quad (\hat{P}_x - \hat{P}_y)|\xi\rangle = \sqrt{2}\xi_2|\xi\rangle, \tag{7.188}$$

其中：$\xi = \xi_1 + \mathrm{i}\xi_2$，$\hat{P}_x = \dfrac{a - a^\dagger}{\mathrm{i}\sqrt{2}}$ 与 $\hat{P}_y = \dfrac{b - b^\dagger}{\mathrm{i}\sqrt{2}}$ 是动量算符. 利用 $|00\rangle\langle 00| = \colon \exp(-a^\dagger a - b^\dagger b) \colon$ 以及 IWOP 技术可以证明它具有

正交性与完备性：

$$\int \frac{d^2\xi}{\pi} |\xi\rangle\langle\xi|$$

$$= \int \frac{d^2\xi}{\pi} :\exp[-(a^\dagger + b - \xi^*)(a + b^\dagger - \xi)]:$$

$$= \int \frac{d^2\xi_1 d\xi_2}{\pi} :\exp\left[-\left(\xi_1 - \frac{\hat{X}+\hat{Y}}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\xi_2 - \frac{\hat{P}_x - \hat{P}_y}{\sqrt{2}}\right)^2\right]:$$

$$= 1. \tag{7.189}$$

根据式(7.155) 并注意到$[a + b^\dagger, a^\dagger + b] = 0$，导出

$$e^{-tt' + t(a+b^\dagger) + t'(a^\dagger + b)} = :\exp[t(a + b^\dagger) + t'(a^\dagger + b)]:$$

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{t^m t'^n}{m!n!} :(a + b^\dagger)^m (a^\dagger + b)^n:. \tag{7.190}$$

与式(7.153) 相比较，则

$$\mathrm{H}_{m,n}(a + b^\dagger, a^\dagger + b) = :(a + b^\dagger)^m (a^\dagger + b)^n:. \tag{7.191}$$

利用式(7.187) 与式(7.189)，有

$$\mathrm{H}_{m,n}(a + b^\dagger, a^\dagger + b) = \int \frac{d^2\xi}{\pi} \mathrm{H}_{m,n}(\xi, \xi^*) |\xi\rangle\langle\xi|$$

$$= \int \frac{d^2\xi}{\pi} \mathrm{H}_{m,n}(\xi, \xi^*) :e^{-(a^\dagger + b - \xi^*)(a + b^\dagger - \xi)}:$$

$$= :(a + b^\dagger)^m (a^\dagger + b)^n:, \tag{7.192}$$

由于$[a+b^\dagger, a^\dagger+b] = 0$，式(7.192) 也能得到积分公式式(7.175). 再利用式(7.187) 与式(7.189) 以及积分公式(7.192)，并联合双变量 Hermite 多项式的递推关系式(7.184)，推导出

$$(a + b^\dagger)\mathrm{H}_{m,n}(a + b^\dagger, a^\dagger + b)$$

$$= \int \frac{d^2\xi}{\pi} \xi \mathrm{H}_{m,n}(\xi, \xi^*) |\xi\rangle\langle\xi|$$

$$= \int \frac{d^2\xi}{\pi} \xi \mathrm{H}_{m,n}(\xi, \xi^*) :e^{-(a^\dagger + b - \xi^*)(a + b^\dagger - \xi)}:$$

$$= \int \frac{d^2\xi}{\pi} [\mathrm{H}_{m+1,n}(\xi, \xi^*) + n\mathrm{H}_{m,n-1}(\xi, \xi^*)] :e^{-(a^\dagger + b - \xi^*)(a + b^\dagger - \xi)}:$$

$$=:(a+b^{\dagger})^{m+1}(a^{\dagger}+b)^{n}:+n:(a+b^{\dagger})^{m}(a^{\dagger}+b)^{n-1}:. \tag{7.193}$$

由上式就能看出一个新的积分公式

$$\int\frac{d^{2}\xi}{\pi}\xi H_{m,n}(\xi,\xi^{*})e^{-(\alpha^{*}-\xi^{*})(\alpha-\xi)}=\alpha^{m+1}\alpha^{*n}+n\alpha^{m}\alpha^{*n-1}. \tag{7.194}$$

类似地，根据式(7.185)，有

$$\int\frac{d^{2}\xi}{\pi}\xi^{*}H_{m,n}(\xi,\xi^{*})e^{-(\alpha^{*}-\xi^{*})(\alpha-\xi)}=\alpha^{m}\alpha^{*n+1}+m\alpha^{m-1}\alpha^{*n}. \tag{7.195}$$

对于 $g\neq 1$ 时，根据式(7.155) 与式(7.153)，并根据$[a+b^{\dagger},a^{\dagger}+b]=0$，导出

$$\begin{aligned}&\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{t^{m}t'^{n}}{m!n!}H_{m,n}[g(a+b^{\dagger}),g(a^{\dagger}+b)]\\&=\exp[-tt'+tg(a+b^{\dagger})+t'g(a^{\dagger}+b)]\\&=:\exp[t(a+b^{\dagger})+t'(a^{\dagger}+b)-tt'(1-g^{2})]:\\&=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{1-g^{2}}t)^{m}(\sqrt{1-g^{2}}t')^{n}}{m!n!}:H_{m,n}\left(\frac{a+b^{\dagger}}{\sqrt{1-g^{2}}},\frac{a^{\dagger}+b}{\sqrt{1-g^{2}}}\right):,\end{aligned} \tag{7.196}$$

进而

$$\begin{aligned}&H_{m,n}[g(a+b^{\dagger}),g(a^{\dagger}+b)]\\&=(1-g^{2})^{(m+n)/2}:H_{m,n}\left(\frac{a+b^{\dagger}}{\sqrt{1-g^{2}}},\frac{a^{\dagger}+b}{\sqrt{1-g^{2}}}\right):.\end{aligned} \tag{7.197}$$

根据式(7.187) 与式(7.189)，有

$$\begin{aligned}&H_{m,n}[g(a+b^{\dagger}),g(a^{\dagger}+b)]\\&=\int\frac{d^{2}\xi}{\pi}H_{m,n}(g\xi,g\xi^{*}):e^{-(a^{\dagger}+b-\xi^{*})(a+b^{\dagger}-\xi)}:\end{aligned} \tag{7.198}$$

比较式(7.197) 与式(7.198)，就有另一个新的积分公式

$$\int \frac{d^2\xi}{\pi} H_{m,n}(g\xi, g\xi^*) e^{-(\alpha^*-\xi^*)(\alpha-\xi)}$$

$$= (1-g^2)^{(m+n)/2} H_{m,n}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1-g^2}}, \frac{\alpha^*}{\sqrt{1-g^2}}\right). \quad (7.199)$$

因为 $\hat{X}+\hat{Y}=\frac{1}{\sqrt{2}}(a+a^\dagger+b^\dagger+b)$，再利用式(7.192) 与式(7.35)，可以推出

$$\begin{aligned}\sqrt{2^n} :(\hat{X}+\hat{Y})^n: &= :(a+b^\dagger+a^\dagger+b)^n: \\ &= \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l} :(a+b^\dagger)^l(a^\dagger+b)^{n-l}: \\ &= \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l} H_{l,n-l}(a+b^\dagger, a^\dagger+b) \\ &= H_n\left(\frac{a+b^\dagger+a^\dagger+b}{2}\right). \quad (7.200)\end{aligned}$$

于是从式(7.200)，可得到在单变量 Hermite 多项式与双变量 Hermite 多项式之间的关系类似于二项式定理

$$\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l} H_{l,n-l}(x,y) = H_n\left(\frac{x+y}{2}\right). \quad (7.201)$$

另一方面，由

$$\begin{aligned}e^{-tt'+t'(a^\dagger+b)+t(a+b^\dagger)} &= \vdots e^{-2tt'+t'(a^\dagger+b)+t(a+b^\dagger)} \vdots \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{2^{(m+n)/2} t^m t'^n}{m!n!} \vdots H_{m,n}\left(\frac{a+b^\dagger}{\sqrt{2}}, \frac{a^\dagger+b}{\sqrt{2}}\right) \vdots\end{aligned} \quad (7.202)$$

得到

$$H_{m,n}(a+b^\dagger, a^\dagger+b) = 2^{(m+n)/2} \vdots H_{m,n}\left(\frac{a+b^\dagger}{\sqrt{2}}, \frac{a^\dagger+b}{\sqrt{2}}\right) \vdots. \quad (7.203)$$

同样地，有

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{t^m t'^n}{m!n!}(a+b^\dagger)^m(a^\dagger+b)^n$$

$$= : e^{tt'+t'(b+a^\dagger)+t(a+b^\dagger)} :$$

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^m (\mathrm{i}t')^n}{m!n!} : \mathrm{H}_{m,n}[-\mathrm{i}(a+b^\dagger), -\mathrm{i}(a^\dagger+b)] :, \tag{7.204}$$

就有

$$(a+b^\dagger)^m (a^\dagger+b)^n = \mathrm{i}^{m+n} : \mathrm{H}_{m,n}[-\mathrm{i}(a+b^\dagger), -\mathrm{i}(a^\dagger+b)] :. \tag{7.205}$$

再根据式(7.187)与式(7.189),也有

$$\begin{aligned}(a+b^\dagger)^m (a^\dagger+b)^n &= \int \frac{\mathrm{d}^2\xi}{\pi} \xi^m \xi^{*n} |\xi\rangle\langle\xi| \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^2\xi}{\pi} \xi^m \xi^{*n} : e^{-(a^\dagger+b-\xi^*)(a+b^\dagger-\xi)} : \\ &= \mathrm{i}^{m+n} : \mathrm{H}_{m,n}[-\mathrm{i}(a+b^\dagger), -\mathrm{i}(a^\dagger+b)] :,\end{aligned} \tag{7.206}$$

这导出了与式(7.170)一样的积分公式. 根据式(7.201)与式(7.206)有

$$\begin{aligned}(\hat{X}+\hat{Y})^n &= 2^{-n/2} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} (a+b^\dagger)^l (a^\dagger+b)^{n-l} \\ &= \mathrm{i}^{-n} 2^{-n/2} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} : \mathrm{H}_{l,n-l}[\mathrm{i}(a+b^\dagger), \mathrm{i}(a^\dagger+b)] : \\ &= \mathrm{i}^{-n} 2^{-n/2} : \mathrm{H}_n\left(\mathrm{i}\frac{a+b^\dagger+a^\dagger+b}{2}\right) : \\ &= (\mathrm{i}\sqrt{2})^{-n} : \mathrm{H}_n\left(\mathrm{i}\frac{\hat{X}+\hat{Y}}{\sqrt{2}}\right) :.\end{aligned} \tag{7.207}$$

实际上,式(7.207)也可以用式(7.31),式(7.188)与式(7.189)来证明,即

$$\begin{aligned}(\hat{X}+\hat{Y})^n &= \int \frac{\mathrm{d}^2\xi}{\pi} (\hat{X}+\hat{Y})^n |\xi\rangle\langle\xi| \\ &= \sqrt{2^n} \int \frac{\mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2}{\pi} \xi_1^n : e^{-\left(\xi_1 - \frac{\hat{X}+\hat{Y}}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\xi_2 - \frac{\hat{P}_x+\hat{P}_y}{\sqrt{2}}\right)^2} :\end{aligned}$$

$$= \sqrt{2^n}\int \frac{d\xi_1}{\sqrt{\pi}}\xi_1^n : e^{-\left(\xi_1-\frac{\hat{X}+\hat{Y}}{\sqrt{2}}\right)^2}:$$

$$= (i\sqrt{2})^{-n} : H_n\left(i\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right):, \tag{7.208}$$

这就说明式(7.201) 是完全正确的.

为了导出更复杂的产生函数；引入另一模式$c^\dagger,d^\dagger$的纠缠态表象

$$|\zeta\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\zeta|^2 + \zeta c^\dagger + \zeta^* d^\dagger - c^\dagger d^\dagger\right)|00\rangle, \zeta = \zeta_1 + i\zeta_2, \tag{7.209}$$

其中:$[c,c^\dagger] = 1$与$[d,d^\dagger] = 1$,也满足

$$(c + d^\dagger)|\zeta\rangle = \zeta|\zeta\rangle, (c^\dagger + d)|\zeta\rangle = \zeta^*|\zeta\rangle, \tag{7.210}$$

以及

$$\int\frac{d^2\zeta}{\pi}|\zeta\rangle\langle\zeta| = \int\frac{d^2\zeta}{\pi} : e^{-(c^\dagger+d-\zeta^*)(c+d^\dagger-\zeta)} := 1. \tag{7.211}$$

作为式(7.192) 的结果,能推出

$$\begin{aligned}G &\equiv \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{t^n s^m}{n!m!}H_{m,n}(a+b^\dagger,a^\dagger+b)H_{m,n}(c+d^\dagger,c^\dagger+d)\\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{t^n s^m}{n!m!} : (a+b^\dagger)^m(a^\dagger+b)^n(c+d^\dagger)^m(c^\dagger+d)^n :\\ &= : \exp[s(a+b^\dagger)(c+d^\dagger) + t(a^\dagger+b)(c^\dagger+d)] :.\end{aligned} \tag{7.212}$$

并根据积分公式

$$\int\frac{d^2 z}{\pi}\exp(\eta|z|^2 + fz + gz^*) = -\frac{1}{\eta}\exp\left(-\frac{fg}{\eta}\right), \quad \mathrm{Re}\eta < 0, \tag{7.213}$$

将式(7.212) 的右边改写成积分形式

$$G = \int\frac{d^2\zeta}{\pi} : \exp\{-|\zeta|^2 + \zeta[(c^\dagger+d) + s(a+b^\dagger)] + \zeta^*[(c+d^\dagger) + t(a^\dagger+b)]\}\exp[-st(a^\dagger+b)(a+b^\dagger) - (c^\dagger+d)(c+d^\dagger)] :$$

$$=:\int\frac{d^2\zeta}{\pi}|\zeta\rangle\langle\zeta|\exp[-st(a^\dagger+b)(a+b^\dagger)+s\zeta(a+b^\dagger)+$$
$$t\zeta^*(a^\dagger+b)]:, \tag{7.214}$$

而对于$(a+b^\dagger)$与$(a^\dagger+b)$的项，也变成如下积分形式：

$$\exp[-st(a^\dagger+b)(a+b^\dagger)+s\zeta(a+b^\dagger)+t\zeta^*(a^\dagger+b)]$$
$$=\frac{1}{1-ts}\int\frac{d^2\xi}{\pi}\exp\left[\frac{-|\xi|^2}{1-ts}+\xi\left(a^\dagger+b+\frac{s\zeta}{1-ts}\right)+\right.$$
$$\left.\xi^*\left(a+b^\dagger+\frac{t\zeta^*}{1-ts}\right)-\frac{ts|\zeta|^2}{1-ts}-(a^\dagger+b)(a+b^\dagger)\right]. \tag{7.215}$$

将式(7.215)代入式(7.214)并用式(7.187)与式(7.189)以及式(7.210)与式(7.211)，就有

$$G=\frac{1}{1-ts}\int\frac{d^2\xi}{\pi}\int\frac{d^2\zeta}{\pi}|\xi\rangle\otimes|\zeta\rangle\langle\zeta|\otimes\langle\xi|\cdot$$
$$\exp\left[\frac{-ts(|\xi|^2+|\zeta|^2)}{1-ts}+\frac{s\zeta\xi}{1-ts}+\frac{t\zeta^*\xi^*}{1-ts}\right]$$
$$=\frac{1}{1-ts}\exp\left\{\frac{-ts}{1-ts}[(a^\dagger+b)(a+b^\dagger)+(c^\dagger+d)(c+d^\dagger)]+\right.$$
$$\left.\frac{s(a+b^\dagger)(c+d^\dagger)}{1-ts}+\frac{t(c^\dagger+d)(a^\dagger+b)}{1-ts}\right\}. \tag{7.216}$$

由于$(a^\dagger+b)$，$(a+b^\dagger)$，$(c^\dagger+d)$和$(c+d^\dagger)$都是相互对易的，这样可以作变量代换$(a^\dagger+b)\to y$，$(a+b^\dagger)\to x$，$(c^\dagger+d)\to y'$，$(c+d^\dagger)\to x'$，然后通过比较式(7.216)与式(7.212)，得到双变量 Hermite 多项式的复杂的产生函数形式

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{s^mt^n}{m!n!}H_{m,n}(x,y)H_{m,n}(x',y')$$
$$=\frac{1}{1-ts}\exp\left[\frac{sxx'+tyy'-ts(xy+x'y')}{1-ts}\right]. \tag{7.217}$$

最后，考虑到 Laguerre 多项式的产生函数[131]

$$\sum_{m=0}^{\infty}L_m(x)s^m=(1-s)^{-1}\exp\left(\frac{-xs}{1-s}\right) \tag{7.218}$$

以及与双变量 Hermite 的关系

$$\mathrm{H}_{m,m}(x,y)=(-1)^m m!\mathrm{L}_m(xy), \tag{7.219}$$

式(7.217) 可以重新表示为：

$$\begin{aligned}
&\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{s^m t^n}{m!n!}\mathrm{H}_{m,n}(x,y)\mathrm{H}_{m,n}(x',y')\\
&=\frac{\mathrm{e}^{tyy'}}{1-st}\exp\left[\frac{-\left(xy+x'y'-tyy'-\frac{1}{t}xx'\right)ts}{1-st}\right]\\
&=\mathrm{e}^{tyy'}\sum_{m=0}^{\infty}(st)^m\mathrm{L}_m\left(xy+x'y'-tyy'-\frac{1}{t}xx'\right)\\
&=\mathrm{e}^{tyy'}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-st)^m}{m!}\mathrm{H}_{m,m}\left[\mathrm{i}\left(\sqrt{t}y'-\frac{x}{\sqrt{t}}\right),\mathrm{i}\left(\sqrt{t}y-\frac{x'}{\sqrt{t}}\right)\right].
\end{aligned} \tag{7.220}$$

比较上式两边的 $s$ 指数则有

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\mathrm{H}_{m,n}(x,y)\mathrm{H}_{m,n}(x',y')\\
&=(-t)^m\mathrm{e}^{tyy'}\mathrm{H}_{m,m}\left[\mathrm{i}\left(\sqrt{t}y'-\frac{x}{\sqrt{t}}\right),\mathrm{i}\left(\sqrt{t}y-\frac{x'}{\sqrt{t}}\right)\right],
\end{aligned} \tag{7.221}$$

该结果与文献[132] 中推导的结果是一样的.

利用式(7.158) 与式(7.217)，则有

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{sab}\mathrm{e}^{ta^\dagger b^\dagger}&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{s^m}{m!}a^m b^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}a^{\dagger n}b^{\dagger n}\\
&=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}s^m t^n}{m!n!}:\mathrm{H}_{m,n}(\mathrm{i}a^\dagger,\mathrm{i}a)\mathrm{H}_{m,n}(\mathrm{i}b^\dagger,\mathrm{i}b):\\
&=\frac{1}{1-ts}:\exp\left[\frac{ts(a^\dagger a+b^\dagger b)+sa^\dagger b^\dagger+tab}{1-ts}\right]:\\
&=\frac{1}{1-ts}\exp\left(\frac{s}{1-st}a^\dagger b^\dagger\right)\exp[-(a^\dagger a+b^\dagger b)\ln(1-ts)]\\
&\quad\exp\left(\frac{t}{1-ts}ab\right).
\end{aligned} \tag{7.222}$$

最后一步利用了 $e^{\lambda a^\dagger a}=:\exp[(e^\lambda-1)a^\dagger a]:$. 此结果与文献[133]用 IWOP 技术推导的结果是一样的. 另一方面，根据 $\vdots\, \mathrm{H}_{m,n}(a^\dagger, a)\,\vdots = a^{\dagger m}a^n$，得到

$$
\begin{aligned}
e^{ta^\dagger b^\dagger}e^{sab} &= \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{t^n s^m}{n!m!}a^{\dagger n}a^m b^{\dagger n}b^m \\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{s^m t^n}{m!n!}\vdots\,\mathrm{H}_{m,n}(a,a^\dagger)\mathrm{H}_{m,n}(b,b^\dagger)\,\vdots \\
&= \frac{1}{1-ts}\vdots\exp\left[\frac{-ts(a^\dagger a+b^\dagger b)+ta^\dagger b^\dagger+sab}{1-ts}\right]\vdots \\
&= \frac{1}{1-ts}\exp\left(\frac{s}{1-st}ab\right)\vdots\exp\left[\frac{-ts}{1-ts}(a^\dagger a+b^\dagger b)\right]\vdots \\
&\quad \exp\left(\frac{t}{1-ts}a^\dagger b^\dagger\right).
\end{aligned}
\tag{7.223}
$$

作为最后一个应用，根据式(7.219)，式(7.221) 以及式(7.158)，有

$$
\begin{aligned}
a^m b^m e^{a^\dagger b^\dagger \tanh\lambda} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tanh^n\lambda}{n!}a^m a^{\dagger n}b^m b^{\dagger n} \\
&= (-1)^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\tanh\lambda)^n}{n!}:\mathrm{H}_{m,n}(\mathrm{i}a,\mathrm{i}a^\dagger)\mathrm{H}_{m,n}(\mathrm{i}b,\mathrm{i}b^\dagger): \\
&= m!\tanh^m\lambda\exp(a^\dagger b^\dagger\tanh\lambda)\cdot \\
&\quad :\mathrm{L}_m(-a^\dagger a-b^\dagger b-ab\coth\lambda-a^\dagger b^\dagger\tanh\lambda):,
\end{aligned}
\tag{7.224}
$$

这与 Laguerre 多项式有关. 基于该结果，光子扣除双模压缩真空态[134] 可表示为

$$
\begin{aligned}
|\lambda\rangle_m &\equiv a^m b^m S_2(\lambda)\,|00\rangle \\
&= a^m b^m\exp(a^\dagger b^\dagger\tanh\lambda)\,|00\rangle \\
&= m!\tanh^m\lambda\exp(a^\dagger b^\dagger\tanh\lambda)\mathrm{L}_m(-a^\dagger b^\dagger\tanh\lambda)\,|00\rangle \\
&= m!\tanh^m\lambda\,\mathrm{L}_m(-a^\dagger b^\dagger\tanh\lambda)S_2(\lambda)\,|00\rangle,
\end{aligned}
\tag{7.225}
$$

式中：$S_2(\lambda)=\exp[\lambda(a^\dagger b^\dagger-ab)]$ 是双模压缩算符. 从式(7.225)，$|\lambda\rangle_m$ 相当于双模压缩真空态的 Laguerre 多项式的激发. 而在文献

[135,136] 中,已计算出它的归一化系数为

$$\langle 00|\ e^{ab\tanh\lambda}a^{\dagger m}b^{\dagger m}a^m b^m e^{a^\dagger b^\dagger \tanh\lambda}\ |00\rangle = (m!)^2\sinh^{2m}\lambda P_m(\cosh 2\lambda), \tag{7.226}$$

其中:$P_m(x)$ 为 Legendre(勒让德)多项式[131]

$$P_m(x) = \sum_{l=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^l(2m-2l)!x^{m-2l}}{2^m l!(m-l)!(m-2l)!}. \tag{7.227}$$

利用式(7.225)与式(7.226)以及相干态的完备性 $\int \frac{d^2\alpha d^2\beta}{\pi^2}|\alpha,\beta\rangle\langle\alpha,\beta| = 1$,就得到

$$\begin{aligned}\int \frac{d^2\alpha d^2\beta}{\pi^2} & L_m(-\alpha\beta\tanh\lambda)L_m(-\alpha^*\beta^*\tanh\lambda)\cdot \\ & \exp[-|\alpha|^2-|\beta|^2+(\alpha\beta+\alpha^*\beta^*)\tanh\lambda] \\ = & \cosh^{2m}\lambda P_m(\cosh 2\lambda).\end{aligned} \tag{7.228}$$

这也是一个新的积分公式.从上面的分析来看,通过联合 IWOP 技术与量子力学表象,可以导出一些新的积分公式,而且不需要真正求积分而得.

## 7.5 含有 Stirling 数的算符恒等式

借助真空态投影算符的正规乘积 $|0\rangle\langle 0| = :e^{-a^\dagger a}:$ 直接导出一系列新的复杂算符等式[137],这些都是有关广义 Stirling 数的等式,在量子光学理论中是非常有用的.

根据粒子数态 $|n\rangle = \frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle$ 以及它完备关系,有

$$\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle\langle 0|\frac{a^n}{\sqrt{n!}} = \sum_{n=0}^{\infty} :\frac{(a^\dagger a)^n}{n!}e^{-a^\dagger a}: = 1. \tag{7.229}$$

由此而得

$$(a^\dagger a)^k = \sum_{n=0}^{\infty} n^k \, |n\rangle\langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} n^k \, : \frac{(a^\dagger a)^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!}(a^\dagger a)^m :. \tag{7.230}$$

利用求和重排公式(7.53) 得到

$$\begin{aligned}(a^\dagger a)^k &=: \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l} (l-m)^k \frac{(a^\dagger a)^{l-m}}{(l-m)!} \frac{(-1)^m}{m!}(a^\dagger a)^m : \\ &=: \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(a^\dagger a)^l}{l!} \sum_{m=0}^{l} (l-m)^k \frac{l!(-1)^m}{m!(l-m)!} : \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^{\dagger l} a^l}{l!} \sum_{m=0}^{l} (-1)^{l-m} \binom{l}{m} m^k,\end{aligned} \tag{7.231}$$

式中：

$$\frac{1}{l!} \sum_{m=0}^{l} (-1)^{l-m} \binom{l}{m} m^k \equiv \left\{ \begin{matrix} k \\ l \end{matrix} \right\}. \tag{7.232}$$

数学里，把$k$个元素的集合划分成$l$个非空子集的分法的个数记为$\left\{ \begin{matrix} k \\ l \end{matrix} \right\}$，称为第二类 Stirling 数. 因此，可以有一个简洁公式

$$(a^\dagger a)^k = \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} k \\ l \end{matrix} \right\} a^{\dagger l} a^l, \tag{7.233}$$

注意对于 $l > k$ 有$\left\{ \begin{matrix} k \\ l \end{matrix} \right\} = 0$，而$\left\{ \begin{matrix} k \\ 0 \end{matrix} \right\} = \delta_{k0}$.

用 $a^\dagger |m\rangle = \sqrt{m+1}\, |m+1\rangle$，和式(7.229)，得

$$\begin{aligned}a^{\dagger l} a^l &= a^{\dagger l} \sum_{m=0}^{\infty} |m\rangle\langle m| \, a^l =: \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a^\dagger a)^m}{(m-l)!} e^{-a^\dagger a} : \\ &=: \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1)\cdots(m-l+1) \frac{(a^\dagger a)^m}{m!} e^{-a^\dagger a} : \\ &= \hat{N}(\hat{N}-1)\cdots(\hat{N}-l+1),\end{aligned} \tag{7.234}$$

式中：$\hat{N} = a^\dagger a$ 为粒子数算符. 联系式(7.231) 和式(7.234)，有

$$\hat{N}^k = \sum_{l=1}^{k} \left\{ \begin{matrix} k \\ l \end{matrix} \right\} \hat{N}(\hat{N}-1)\cdots(\hat{N}-l+1). \tag{7.235}$$

让 $N\to x$，于是就导出了第二类 Stirling 数的母函数公式

$$\sum_{l=1}^{k}\left\{\begin{matrix}k\\l\end{matrix}\right\}x(x-1)\cdots(x-l+1)=x^{k}. \tag{7.236}$$

另一方面，

$$\mathrm{e}^{\lambda a^{\dagger}a}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{\lambda k}\ |k\rangle\langle k|=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}:\mathrm{e}^{-a^{\dagger}a}k^{n}\frac{(a^{\dagger}a)^{k}}{k!}:\frac{\lambda^{n}}{n!}, \tag{7.237}$$

这与 $\mathrm{e}^{\lambda a^{\dagger}a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{n}}{n!}(a^{\dagger}a)^{n}$ 比较 $\lambda^{n}$ 的系数，则有

$$:\mathrm{e}^{-a^{\dagger}a}\sum_{k=0}^{\infty}k^{n}\frac{(a^{\dagger}a)^{k}}{k!}:\equiv:B(n,a^{\dagger}a):, \tag{7.238}$$

并发现

$$:B(n,a^{\dagger}a):=(a^{\dagger}a)^{n}=:\sum_{l=0}^{\infty}\left\{\begin{matrix}n\\l\end{matrix}\right\}(a^{\dagger}a)^{l}:. \tag{7.239}$$

因此，可导出

$$B(n,y)=\sum_{l=0}^{\infty}\left\{\begin{matrix}n\\l\end{matrix}\right\}y^{l}=\sum_{l=1}^{n}\left\{\begin{matrix}n\\l\end{matrix}\right\}y^{l}, \tag{7.240}$$

这正是 Bell 多项式

$$B(n,y)=\mathrm{e}^{-y}\sum_{k=0}^{\infty}k^{n}\frac{y^{k}}{k!}, \tag{7.241}$$

而 $B(0,y)=1$. 进而，从

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\lambda a^{\dagger}a}&=:\exp[(\mathrm{e}^{\lambda}-1)a^{\dagger}a]:\\&=:\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{e}^{\lambda}-1)^{l}(a^{\dagger}a)^{l}}{l!}:\\&=\sum_{n=0}^{\infty}:B(n,a^{\dagger}a):\frac{\lambda^{n}}{n!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\left\{\begin{matrix}n\\l\end{matrix}\right\}:(a^{\dagger}a)^{l}:\frac{\lambda^{n}}{n!},\end{aligned} \tag{7.242}$$

可以得到 Stirling 数的产生函数公式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\begin{Bmatrix}n\\l\end{Bmatrix}\frac{\lambda^n}{n!}=\frac{(e^{\lambda}-1)^l}{l!}. \tag{7.243}$$

现在，考虑如何将$(a^{\dagger r}a^r)^k$转变为正规乘积形式？利用式(7.234)，有

$$\begin{aligned}
&(a^{\dagger r}a^r)^k\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}[n(n-1)\cdots(n-r+1)]^k\ |n\rangle\langle n|\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}[n(n-1)\cdots(n-r+1)]^k:\frac{(a^{\dagger}a)^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}(a^{\dagger}a)^m:\\
&=:\sum_{l=0}^{\infty}(a^{\dagger}a)^l\sum_{m=0}^{l}[(l-m)(l-m-1)\cdots(l-m-r+1)]^k\cdot\\
&\quad\frac{(-1)^m}{m!(l-m)!}:\\
&=:\sum_{l=0}^{\infty}(a^{\dagger}a)^l\frac{1}{l!}\sum_{m=0}^{l}(-1)^{l-m}\binom{l}{m}[m(m-1)\cdots(m-r+1)]^k:.
\end{aligned} \tag{7.244}$$

引入

$$\frac{1}{l!}\sum_{m=0\to m=r}^{l}(-1)^{l-m}\binom{l}{m}[m(m-1)\cdots(m-r+1)]^k\equiv S_{r,r}(k,l), \tag{7.245}$$

这就是一种广义 Stirling 数，于是有算符等式

$$(a^{\dagger r}a^r)^k=:\sum_{l=0}^{\infty}(a^{\dagger}a)^lS_{r,r}(k,l):,\quad k\neq 0. \tag{7.246}$$

由于

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0\to k=[l/r]}^{\infty}\frac{y^k}{k!}S_{r,r}(k,l)\\
&=\frac{1}{l!}\sum_{m=0}^{l}(-1)^{l-m}\binom{l}{m}\sum_{k=[l/r]}^{\infty}\frac{y^k}{k!}[m(m-1)\cdots(m-r+1)]^k\\
&=\frac{1}{l!}\sum_{m=0}^{l}(-1)^{l-m}\binom{l}{m}[e^{ym(m-1)\cdots(m-r+1)}-1]
\end{aligned} \tag{7.247}$$

则有

$$
\begin{aligned}
e^{\lambda a^{\dagger r} a^r} &= \sum_{k=0} \frac{\lambda^k}{k!}(a^{\dagger r} a^r)^k \\
&= 1 + \sum_{k=1} \frac{\lambda^k}{k!}(a^{\dagger r} a^r)^k \\
&= 1 + \sum_{k=1} \frac{\lambda^k}{k!} : \sum_{l=0}^{\infty} (a^{\dagger} a)^l S_{r,r}(k,l) : \\
&= 1 + : \sum_{l=r}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{m=r}^{l} (-1)^{l-m} \binom{l}{m} [e^{\lambda m(m-1)\cdots(m-r+1)} - 1](a^{\dagger} a)^l : .
\end{aligned}
\tag{7.248}
$$

从

$$
\hat{N} a^{\dagger r-1} = a^{\dagger r-1} \hat{N} + (r-1) a^{\dagger r-1} = a^{\dagger r-1}(\hat{N} + r - 1), \tag{7.249}
$$

有

$$
\begin{aligned}
&(a^{\dagger r} a)^k \\
&= (a^{\dagger r-1} \hat{N})^k = a^{\dagger r-1} \hat{N} a^{\dagger r-1} \hat{N} a^{\dagger r-1} \cdots \hat{N} a^{\dagger r-1} N \\
&= a^{\dagger 2(r-1)} (\hat{N} + r - 1) a^{\dagger r-1} (\hat{N} + r - 1) \cdots a^{\dagger r-1} (\hat{N} + r - 1) \hat{N} \\
&= a^{\dagger 3(r-1)} [\hat{N} + 2(r-1)] a^{\dagger r-1} [\hat{N} + 2(r-1)] \cdots \cdot \\
&\quad a^{\dagger r-1} [\hat{N} + 2(r-1)] (\hat{N} + r - 1) \hat{N} \\
&= \cdots = a^{\dagger k(r-1)} [\hat{N} + (k-1)(r-1)][N + (k-2)(r-1)] \cdots \cdot \\
&\quad [\hat{N} + 2(r-1)] (\hat{N} + r - 1) \hat{N} \\
&= a^{\dagger k(r-1)} \prod_{j=0}^{k-1} [\hat{N} + j(r-1)].
\end{aligned}
\tag{7.250}
$$

注意当 $m < m_0$ 时，$\prod_{n=m_0}^{m} \cdots = 1$. 根据式(7.250)，得

$$
(a^{\dagger r} a)^k = a^{\dagger k(r-1)} \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} [n + j(r-1)] \, |n\rangle\langle n|
$$

$$=a^{\dagger k(r-1)}\sum_{n=0}^{\infty}\prod_{j=0}^{k-1}[n+j(r-1)]:\frac{(a^{\dagger}a)^n}{n!}\cdot$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}(a^{\dagger}a)^m:$$

$$=a^{\dagger k(r-1)}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\prod_{j=0}^{k-1}[l-m+j(r-1)]\cdot$$

$$:\frac{(a^{\dagger}a)^l}{(l-m)!}\frac{(-1)^m}{m!}:. \tag{7.251}$$

设

$$\frac{1}{l!}\sum_{m=0}^{l}\prod_{j=0}^{k-1}[m+j(r-1)](-1)^m\binom{l}{m}\equiv S_{r,l}(k,l), \tag{7.252}$$

即

$$(a^{\dagger r}a)^k=:a^{\dagger k(r-1)}\sum_{l=0}^{\infty}S_{r,l}(k,l)(a^{\dagger}a)^l: \tag{7.253}$$

和

$$e^{\lambda a^{\dagger r}a}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}(a^{\dagger r}a)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}:a^{\dagger k(r-1)}\sum_{l=0}^{\infty}S_{r,l}(k,l)(a^{\dagger}a)^l:. \tag{7.254}$$

式(7.254)也可以利用 IWOP 技术导出[138].

# 第8章　用IWOP技术构造一种三体纠缠态表象及其应用

构建多体纠缠态表象首先要选好合适的力学量组合. 回忆正交变换矩阵 $\boldsymbol{R}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ 使得两粒子坐标变为

$$\boldsymbol{R}_2\begin{pmatrix}\hat{X}_1\\ \hat{X}_2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\hat{X}_1-\hat{X}_2\\ \hat{X}_1+\hat{X}_2\end{pmatrix} \tag{8.1}$$

并使得动量变换为

$$\boldsymbol{R}_2\begin{pmatrix}\hat{P}_1\\ \hat{P}_2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\hat{P}_1-\hat{P}_2\\ \hat{P}_1+\hat{P}_2\end{pmatrix}. \tag{8.2}$$

从式(8.1)与式(8.2)可见存在对易关系，即 $[\hat{X}_1-\hat{X}_2,\hat{P}_1+\hat{P}_2]=0$，$[\hat{X}_1+\hat{X}_2,\hat{P}_1-\hat{P}_2]=0$. 在前面已经分别给出这两组算符的共同本征态，称之为两体纠缠态表象. 自然会想到对三体问题也存在一个 $3\times3$ 矩阵

$$\boldsymbol{R}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}. \tag{8.3}$$

使得

$$
\boldsymbol{R}_3\begin{pmatrix}\hat{X}_1\\ \hat{X}_2\\ \hat{X}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{X}_1-2\hat{X}_2+\hat{X}_3)\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X}_1-\hat{X}_3)\\ \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{X}_1+\hat{X}_2+\hat{X}_3)\end{pmatrix} \tag{8.4}
$$

和

$$
\boldsymbol{R}_3\begin{pmatrix}\hat{P}_1\\ \hat{P}_2\\ \hat{P}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}(\hat{P}_1-2\hat{P}_2+\hat{P}_3)\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{P}_1-\hat{P}_3)\\ \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{P}_1+\hat{P}_2+\hat{P}_3)\end{pmatrix} \tag{8.5}
$$

从上两式中选择$\hat{X}_1-\hat{X}_3$，$\hat{X}_1+\hat{X}_2+\hat{X}_3$，$\hat{P}_1-2\hat{P}_2+\hat{P}_3$这三个相互对易的算符，也可选择$\hat{X}_1-2\hat{X}_2+\hat{X}_3$，$\hat{P}_1-\hat{P}_3$，$\hat{P}_1+\hat{P}_2+\hat{P}_3$算符，它们之间也是相互对易的，而且这两组算符互为共轭. 下面利用 IWOP 技术构建上述对易算符的共同本征函数，即三体纠缠态表象[139,140].

## 8.1 新三体纠缠态表象的构造

本节就构造相互对易算符$\hat{X}_1-\hat{X}_3$，$\hat{X}_1+\hat{X}_2+\hat{X}_3$，$\hat{P}_1-2\hat{P}_2+\hat{P}_3$的共同本征矢，记为$|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle$，满足本征方程

$$
(\hat{X}_1-\hat{X}_3)|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle=\chi_1|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle, \tag{8.6}
$$

$$
(\hat{X}_1+\hat{X}_2+\hat{X}_3)|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle=\chi_2|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle, \tag{8.7}
$$

$$
(\hat{P}_1-2\hat{P}_2+\hat{P}_3)|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle=\rho|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle. \tag{8.8}
$$

式中：$\rho,\chi_1,\chi_2$都是实数. 那么怎样求出$|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle$的具体形式呢？

先根据本征方程的启发构造出一个正规乘积内的纯 Guass 型积分

$$\int \frac{\mathrm{d}\rho \mathrm{d}\chi_1 \mathrm{d}\chi_2}{6\pi^{3/2}} :\exp\left\{-\frac{1}{6}[\rho-(\hat{P}_1-2\hat{P}_2+\hat{P}_3)]^2-\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}[\chi_1-(\hat{X}_1-\hat{X}_3)]^2-\frac{1}{3}[\chi_2-(\hat{X}_1+\hat{X}_2+\hat{X}_3)]^2\right\}: \tag{8.9}$$

根据 IWOP 技术的思想,在正规乘积内的玻色算符可以视为普通参数,而积分限又是无穷,用 $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x^2+bx}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\mathrm{e}^{\frac{b^2}{4\lambda}}$ 公式进行积分,其结果为 1,它代表新的完备性关系. 再利用

$$\hat{X}_j=\frac{a_j+a_j^\dagger}{\sqrt{2}},\quad \hat{P}_j=\frac{a_j-a_j^\dagger}{\mathrm{i}\sqrt{2}} \tag{8.10}$$

并考虑到 $:\exp(-\sum_{j=1}^{3} a_j^\dagger a_j):=|000\rangle\langle 000|$ 的三模真空态投影形式,把式(8.9)中的被积算符分拆为一个纯态投影算符,就得

$$1=\frac{1}{6\pi^{3/2}}\int \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\chi_1 \mathrm{d}\chi_2 :\exp\left[-\frac{1}{6}(\rho^2+3\chi_1^2+2\chi_2^2)+\right.$$
$$\frac{\mathrm{i}\sqrt{2}}{6}\rho(a_1^\dagger-2a_2^\dagger+a_3^\dagger-a_1+2a_2-a_3)+$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\chi_1(a_1^\dagger-a_3^\dagger+a_1-a_3)+\frac{\sqrt{2}}{3}\chi_2\sum_{j=1}^{3}(a_j+a_j^\dagger)-$$
$$\frac{1}{6}(2a_1^{\dagger 2}-a_2^{\dagger 2}+2a_3^{\dagger 2}+2a_1^2-a_2^2+2a_3^2)-$$
$$\frac{1}{3}(2a_1^\dagger a_2^\dagger-a_1^\dagger a_3^\dagger+2a_2^\dagger a_3^\dagger+2a_1a_2-a_1a_3+2a_2a_3)-$$
$$\left.\sum_{j=1}^{3} a_j^\dagger a_j\right]:$$
$$\doteq\int \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\chi_1 \mathrm{d}\chi_2\, |\rho,\chi_1,\chi_2\rangle\langle\rho,\chi_1,\chi_2|, \tag{8.11}$$

其中:

$$
\begin{aligned}
|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle = &\frac{1}{\sqrt{6}\,\pi^{3/4}}\exp\Big[-\frac{1}{12}(\rho^2+3\chi_1^2+2\chi_2^2)+\\
&\frac{\sqrt{2}}{6}\mathrm{i}\rho(a_1^\dagger-2a_2^\dagger+a_3^\dagger)+\frac{\sqrt{2}}{2}\chi_1(a_1^\dagger-a_3^\dagger)+\\
&\frac{\sqrt{2}}{3}\chi_2\sum_{j=1}^{3}a_j^\dagger-\frac{1}{6}(2a_1^{\dagger 2}-a_2^{\dagger 2}+2a_3^{\dagger 2})-\\
&\frac{1}{3}(2a_1^\dagger a_2^\dagger-a_1^\dagger a_3^\dagger+2a_2^\dagger a_3^\dagger)\Big]|000\rangle.
\end{aligned}\tag{8.12}
$$

它是一个三体纠缠态在 Fock 空间中的具体形式，也组成了完备集. 实际上，将 $a_j\,(j=1,2,3)$ 分别作用于 $|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle$，并利用 $[a_j,f(a_j,a_j^\dagger)]=\frac{\partial f(a_j,a_j^\dagger)}{\partial a_j^\dagger}$ 以及 $a_j|0\rangle=0$，就能导出

$$
\begin{aligned}
&a_1|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle=\\
&\frac{1}{3}\Big[\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathrm{i}\rho+3\chi_1+2\chi_2)-(2a_1^\dagger+2a_2^\dagger-a_3^\dagger)\Big]|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle,
\end{aligned}\tag{8.13}
$$

$$
\begin{aligned}
&a_2|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle=\\
&\frac{1}{3}\Big[\sqrt{2}(-\mathrm{i}\rho+\chi_2)+(a_2^\dagger-2a_1^\dagger-2a_3^\dagger)\Big]|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle,
\end{aligned}\tag{8.14}
$$

$$
\begin{aligned}
&a_3|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle=\\
&\frac{1}{3}\Big[\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathrm{i}\rho-3\chi_1+2\chi_2)+(a_1^\dagger-2a_2^\dagger-2a_3^\dagger)\Big]|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle.
\end{aligned}\tag{8.15}
$$

联合式(8.13)，式(8.14)与式(8.15)并考虑式(8.10)就能给出本征方程式(8.6)～式(8.8).

利用式(8.6)～式(8.8)，也能计算出

$$
\begin{aligned}
&\langle\rho',\chi_1',\chi_2'|(\hat{X}_1-\hat{X}_3)|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle\\
&=\chi_1'\langle\rho',\chi_1',\chi_2'|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle\\
&=\chi_1\langle\rho',\chi_1',\chi_2'|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle,
\end{aligned}\tag{8.16}
$$

$$\langle\rho',\chi_1',\chi_2'|(\hat{X}_1+\hat{X}_2+\hat{X}_3)|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle$$
$$=\chi_2'\langle\rho',\chi_1',\chi_2'|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle$$
$$=\chi_2\langle\rho',\chi_1',\chi_2'|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle, \tag{8.17}$$

$$\langle\rho',\chi_1',\chi_2'|(\hat{P}_1-2\hat{P}_2+\hat{P}_3)|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle$$
$$=\rho'\langle\rho',\chi_1',\chi_2'|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle$$
$$=\rho\langle\rho',\chi_1',\chi_2'|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle, \tag{8.18}$$

这就说明$|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle$具有正交性

$$\langle\rho',\chi_1',\chi_2'|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle=\delta(\rho'-\rho)\delta(\chi_1'-\chi_1)\delta(\chi_2'-\chi_2). \tag{8.19}$$

因此$|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle$有资格组成一个量子力学表象.

同样的方法,能找到相互对易算符$\hat{P}_1-\hat{P}_3$,$\hat{P}_1+\hat{P}_2+\hat{P}_3$,$\hat{X}_1-2\hat{X}_2+\hat{X}_3$的共同本征态为

$$\begin{aligned}|\chi,\rho_1,\rho_2\rangle=&\frac{1}{\sqrt{6}\pi^{3/4}}\exp\Big[-\frac{1}{12}(\chi^2+3\rho_1^2+2\rho_2^2)+\\&\frac{i\sqrt{2}}{2}\rho_1(a_1^\dagger-a_3^\dagger)+\frac{i\sqrt{2}}{3}\rho_2\Big(\sum_{j=1}^{3}a_j^\dagger\Big)+\\&\frac{\sqrt{2}}{6}\chi(a_1^\dagger-2a_2^\dagger+a_3^\dagger)+\frac{1}{6}(2a_1^{\dagger2}-a_2^{\dagger2}+2a_3^{\dagger2})+\\&\frac{1}{3}(2a_1^\dagger a_2^\dagger-a_1^\dagger a_3^\dagger+2a_2^\dagger a_3^\dagger)\Big]|000\rangle.\end{aligned} \tag{8.20}$$

其满足的本征方程为

$$(\hat{P}_1-\hat{P}_3)|\chi,\rho_1,\rho_2\rangle=\rho_1|\chi,\rho_1,\rho_2\rangle, \tag{8.21}$$

$$(\hat{P}_1+\hat{P}_2+\hat{P}_3)|\chi,\rho_1,\rho_2\rangle=\rho_2|\chi,\rho_1,\rho_2\rangle, \tag{8.22}$$

$$(\hat{X}_1-2\hat{X}_2+\hat{X}_3)|\chi,\rho_1,\rho_2\rangle=\chi|\chi,\rho_1,\rho_2\rangle. \tag{8.23}$$

$|\chi,\rho_1,\rho_2\rangle$也具有完备性与正交性,即

$$\int d\chi d\rho_1 d\rho_2|\chi,\rho_1,\rho_2\rangle\langle\chi,\rho_1,\rho_2|=1, \tag{8.24}$$

$$\langle \chi', \rho_1', \rho_2' \mid \chi, \rho_1, \rho_2 \rangle = \delta(\chi' - \chi)\delta(\rho_1' - \rho_1)\delta(\rho_2' - \rho_2). \tag{8.25}$$

实际上，$|\chi,\rho_1,\rho_2\rangle$就是$|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle$的共轭态，这里“共轭”源于式(8.6)～式(8.8)中的算符与式(8.21)～式(8.23)中的算符是共轭对，即

$$[\hat{X}_1 - \hat{X}_3, \hat{P}_1 - \hat{P}_3] = 2\mathrm{i}, \tag{8.26}$$

$$[\hat{X}_1 + \hat{X}_2 + \hat{X}_3, \hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \hat{P}_3] = 3\mathrm{i}, \tag{8.27}$$

$$[\hat{P}_1 - 2\hat{P}_2 + \hat{P}_3, \hat{X}_1 - 2\hat{X}_2 + \hat{X}_3] = -6\mathrm{i}. \tag{8.28}$$

值得指出的是在文献[141,142]中所构造的三体纠缠态表象分别是$\hat{X}_1-\hat{X}_2,\hat{X}_1-\hat{X}_3,\hat{P}_1+\hat{P}_2+\hat{P}_3$和$\hat{P}_1-\hat{P}_2,\hat{P}_1-\hat{P}_3,\hat{X}_1+\hat{X}_2+\hat{X}_3$两组算符的共同本征态．尽管$[\hat{X}_1-\hat{X}_2,\hat{P}_1-\hat{P}_2]=2\mathrm{i}$，$[\hat{X}_1-\hat{X}_3,\hat{P}_1-\hat{P}_3]=2\mathrm{i}$与$[\hat{P}_1+\hat{P}_2+\hat{P}_3,\hat{X}_1+\hat{X}_2+\hat{X}_3]=-3\mathrm{i}$，但是由于$[\hat{X}_1-\hat{X}_2,\hat{P}_1-\hat{P}_3]=\mathrm{i}$和$[\hat{X}_1-\hat{X}_3,\hat{P}_1-\hat{P}_2]=\mathrm{i}$对易关系的存在，这两种三体纠缠态不应称为相互共轭态．

## 8.2　新三体纠缠态的 Schmidt 分解

Schmidt 分解定理在量子纠缠的研究中有着至关重要的作用，它是判断量子系统是否存在纠缠的重要判据[143,144]．例如：对于两体纯态的 Schmidt 数如果大于 1，则被称为是纠缠态，否则就是可分的．在文献[67]中就显示纠缠态$|\eta\rangle$可以分解成

$$|\eta\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta_1\eta_2/2}\int \mathrm{d}x \, |x\rangle_1 \otimes |x - \eta_1\rangle_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta_1 x}, \tag{8.29}$$

式中：$|x\rangle_i$就是坐标算符的本征态

$$|x\rangle_i = \pi^{-1/4}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}x a_i^\dagger - \frac{1}{2}a_i^{\dagger 2}\right)|0\rangle_i, \tag{8.30}$$

从 Schmidt 分解定理$|\eta\rangle$确定是纠缠态．为了展现$|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle$的纠

缠性,考虑以下的一重 Fourier 积分

$$\frac{1}{2\pi}\int d\rho e^{-ix\rho}\ |\ \rho,\chi_1,\chi_2\rangle$$
$$=\frac{1}{\pi^{3/4}\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{6}(a_1^\dagger-2a_2^\dagger+a_3^\dagger-3\sqrt{2}x)^2-\frac{1}{4}\chi_1^2-\frac{1}{6}\chi_2^2+\right.$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\chi_1(a_1^\dagger-a_3^\dagger)+\frac{\sqrt{2}}{3}\chi_2\left(\sum_{i=1}^{3}a_i^\dagger\right)-\frac{1}{6}(2a_1^{\dagger 2}-a_2^{\dagger 2}+2a_3^{\dagger 2})-$$
$$\left.\frac{1}{3}(2\,a_1^\dagger\,a_2^\dagger-a_1^\dagger\,a_3^\dagger+2a_2^\dagger\,a_3^\dagger)\right]|\ 000\rangle, \tag{8.31}$$

通过比较式(8.30),有

$$\frac{1}{2\pi}\int d\rho e^{-ix\rho}\ |\ \rho,\chi_1,\chi_2\rangle$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|x+\frac{\chi_1}{2}+\frac{\chi_2}{3}\right\rangle_1\otimes\left|-2x+\frac{\chi_2}{3}\right\rangle_2\otimes\left|x-\frac{\chi_1}{2}+\frac{\chi_2}{3}\right\rangle_3. \tag{8.32}$$

其逆变换反映出纠缠态的标准形式

$$|\ \rho,\chi_1,\chi_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\rho\left(\frac{1}{2}\chi_1+\frac{1}{3}\chi_2\right)}\int dx\ |\ x\rangle_1\otimes|-2x+\chi_1+\chi_2\rangle_2\otimes$$
$$|\ x-\chi_1\rangle_3 e^{ix\rho}, \tag{8.33}$$

这表明了一旦对粒子 1 测量定为$|x\rangle_1$,同时粒子 2 与粒子 3 分别坍缩为态$|-2x+\chi_1+\chi_2\rangle_2$与$|x-\chi_1\rangle_3$,展现了纠缠特性,其组成的表象就是纠缠态表象. 式(8.33)对分析连续变量的量子态的远程隐态传输有用. 另一方面,借助动量算符的本征态

$$|\ p\rangle_i=\pi^{-1/4}\exp\left(-\frac{1}{2}p^2+\sqrt{2}ip\,a_i^\dagger+\frac{1}{2}\,a_i^{\dagger 2}\right)|\ 0\rangle_i;\ i=1,2,3; \tag{8.34}$$

对$|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle$作两重 Fourier 积分变换

$$\frac{1}{4\pi^2}\int d\chi_1 d\chi_2 e^{-i(u\chi_1+v\chi_2)}\ |\ \rho,\chi_1,\chi_2\rangle$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\rho}{6}-v-u\right\rangle_1 \otimes \left|-\frac{\rho}{3}-v\right\rangle_2 \otimes \left|\frac{\rho}{6}-v+u\right\rangle_3. \tag{8.35}$$

相应的逆变换为

$$|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle = \int \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(u\chi_1+v\chi_2)}\left|\frac{\rho}{6}-v-u\right\rangle_1 \otimes \left|-\frac{\rho}{3}-v\right\rangle_2 \otimes \left|\frac{\rho}{6}-v+u\right\rangle_3, \tag{8.36}$$

同样也展现它的纠缠性. 对于三体纠缠态$|\chi,\rho_1,\rho_2\rangle$,在动量表象中的 Schmidt 分解形式为

$$|\chi,\rho_1,\rho_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi\left(\frac{1}{2}\rho_1+\frac{1}{3}\rho_2\right)}\int \mathrm{d}p\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi p}\;|p\rangle_1 \otimes |-2p+\rho_1+\rho_2\rangle_2 \otimes |p-\rho_1\rangle_3. \tag{8.37}$$

最后,利用

$${}_j\langle x \mid p\rangle_j = (2\pi)^{-1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_j x_j},\quad j=1,2,3 \tag{8.38}$$

与式(8.33)和式(8.37),能够得到$\langle\rho,\chi_1,\chi_2|$与$|\chi,\rho_1,\rho_2\rangle$之间的内积为

$$\langle\rho,\chi_1,\chi_2 \mid \chi,\rho_1,\rho_2\rangle = \frac{1}{6(2\pi)^{3/2}}\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{6}(\rho\chi-2\chi_2\rho_2-3\chi_1\rho_1)\right]. \tag{8.39}$$

于是得到

$$\frac{1}{6(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\chi_1\mathrm{d}\chi_2\;|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{6}(\rho\chi-2\chi_2\rho_2-3\chi_1\rho_1)\right] = |\chi,\rho_1,\rho_2\rangle. \tag{8.40}$$

## 8.3 连续两体纠缠态的远程传输

下面,借助$|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle$来实现连续变量的两体纠缠态远程传输[139]. 假设粒子 3 属于 Alice, 粒子 4,5 属于 Bob,它们事先制备

成纠缠态$|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle_{345}$，而 Alice 最初拥有一未知纠缠态$|E(q)\rangle_{12}$，其形式为

$$|E(q)\rangle_{12}=\int \mathrm{d}xE(x)\,|x_1\rangle_1\otimes|x-q\rangle_2, \qquad (8.41)$$

于是整个系统的状态为

$$|\Psi\rangle=|E\rangle_{12}\otimes|p,\chi_1,\chi_2\rangle_{345}. \qquad (8.42)$$

Alice 想把这未知态通过纠缠通道$|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle_{345}$传输给 Bob. 为此，Alice 首次对手中粒子 1,2,3 进行如下操作：

$$\Pi_3=|p'\rangle_{11}\langle p'|\otimes|\eta\rangle_{2323}\langle\eta|. \qquad (8.43)$$

即作了具体测量($|p'\rangle_1\otimes|\eta\rangle_{23}$被认为连续 Bell 基). 根据式(8.29)和式(8.33)以及式(8.38)，测量后粒子 4 与 5 坍缩为

$$\begin{aligned}&{}_{23}\langle\eta|_1\langle p'|E\rangle_{12}\otimes|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle_{345}\\&=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\rho\left(\frac{1}{2}\chi_1+\frac{1}{3}\chi_2\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta_2\eta_3/2}\int\mathrm{d}x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'(x+q)}E(x+q)\cdot\\&\quad|-2x+2\eta_2+\chi_1+\chi_2\rangle_4\otimes|x-\eta_2-\chi_1\rangle_5\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-\eta_2)\rho}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta_3x}\\&=MU_4\otimes U_5\otimes|E\rangle_{45},\end{aligned} \qquad (8.44)$$

其中：$U_4$ 与 $U_5$ 都是幺正算符，$M$ 是相位因子，分别定义为

$$U_4=\int\mathrm{d}x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'x-\mathrm{i}\eta_3x}\,|-2x+2\eta_2+\chi_1+\chi_2\rangle_{44}\langle x+q|, \qquad (8.45)$$

$$U_5=\int\mathrm{d}x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\rho}\,|x-\eta_2-\chi_1\rangle_{55}\langle x|, \qquad (8.46)$$

$$M=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\rho\left(\frac{1}{2}\chi_1+\frac{1}{3}\chi_2\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta_2\eta_3/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'q}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta_2\rho}. \qquad (8.47)$$

其次，Alice 通过经典通道将她所测量($\eta$ 与 $p'$)的结果告诉 Bob；当后者收到有关信息后，依次作幺正操作 $U_4^{-1}$ 与 $U_5^{-1}$. 最终成功地得到了 Alice 所传输的信息.

同样地，也可利用$|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle$远程传输一个双模压缩态真空态. 根据式(5.4)与式(8.29)，双模压缩真空态可表示为

$$\int \frac{d^2\eta}{\pi}\left|\frac{\eta}{\mu}\right\rangle_{1212}\langle\eta\mid 00\rangle$$
$$=\int \frac{d^2\eta}{\pi}e^{-|\eta|^2/2}\left|\frac{\eta}{\mu}\right\rangle_{12}$$
$$=\int \frac{d^2\eta}{\pi}\int dx\exp\left(-\frac{|\eta|^2}{2}-\frac{i\eta_1\eta_2}{2\mu^2}\right)|x\rangle_1\otimes\left|x-\frac{\eta_1}{\mu}\right\rangle_2 e^{i\eta_2 x/\mu}. \tag{8.48}$$

发送者做如式(8.44)那样的对总态进行联合测量，则有

$$\begin{aligned}
&{}_{23}\langle\eta'|_1\langle p'|\int\frac{d^2\eta}{\pi}\left|\frac{\eta}{\mu}\right\rangle_{1212}\langle\eta\mid 00\rangle_{12}\otimes|p,\chi_1,\chi_2\rangle_{345}\\
&=\frac{1}{2\pi^2}e^{-ip\left(\frac{1}{2}\chi_1+\frac{1}{3}\chi_2\right)}e^{i\eta_2'\eta_3'/2}\int d^2\eta\int dx\exp\left(-\frac{|\eta|^2}{2}-\frac{i\eta_1\eta_2}{2\mu^2}\right)e^{-i\eta_3' x}\cdot\\
&\quad e^{-ip'\left(\frac{\eta_1}{\mu}+x\right)}e^{i\eta_2\left(\frac{\eta_1}{\mu}+x\right)/\mu}|-2x+2\eta_2'+\chi_1+\chi_2\rangle_4\otimes\\
&\quad |x-\eta_2'-\chi_1\rangle_5 e^{i(x-\eta_2')p}\\
&=M'U_4'\otimes U_5'\otimes S_2(\lambda)\mid 00\rangle_{45},
\end{aligned} \tag{8.49}$$

其中：

$$M'=\frac{1}{2\pi}e^{i\eta_2'\eta_3'/2}e^{-ip\left(\frac{1}{2}\chi_1+\frac{1}{3}\chi_2\right)}e^{-i\eta_2' p}, \tag{8.50}$$

$$U_4'=\int dx e^{-ip'\left(x+\frac{\eta_1}{\mu}\right)}|-2x+2\eta_2'+\chi_1+\chi_2\rangle_{44}\left\langle x+\frac{\eta_1}{\mu}\right|, \tag{8.51}$$

$$U_5'=\int_{-\infty}^{\infty}dx e^{-i(\eta_3'-p)x}|x-\eta_2'-\chi_1\rangle_{55}\langle x|. \tag{8.52}$$

当接收者得到发送者的测量结果，就依次执行幺正变换 $U_4'^{-1}$ 与 $U_5'^{-1}$，便能得到双模压缩态 $S_2(\lambda)|00\rangle_{45}$.

## 8.4 新的三模 $SU(1,1)$ 压缩算符

利用 $|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle$ 或 $|\chi,\rho_1,\rho_2\rangle$ 表象中，我们构建一种三模压缩

算符 $S_3$，为

$$S_3 = \int \frac{\mathrm{d}\rho \mathrm{d}\chi_1 \mathrm{d}\chi_2}{\mu^{3/2}} \left| \frac{\rho}{\mu}, \frac{\chi_1}{\mu}, \frac{\chi_2}{\mu} \right\rangle \langle \rho, \chi_1, \chi_2 |$$

$$= \mu^{3/2} \int \mathrm{d}\chi \mathrm{d}\rho_1 \mathrm{d}\rho_2 \ | \mu\chi, \mu\rho_1, \mu\rho_2 \rangle \langle \chi, \rho_1, \rho_2 |. \quad (8.53)$$

利用它们的正交性(见式(8.19)与式(8.25))，就有

$$S_3 \ | \rho, \chi_1, \chi_2 \rangle = \frac{1}{\mu^{3/2}} \left| \frac{\rho}{\mu}, \frac{\chi_1}{\mu}, \frac{\chi_2}{\mu} \right\rangle \quad (8.54)$$

$$S_3 \ | \chi, \rho_1, \rho_2 \rangle = \mu^{3/2} \ | \mu\chi, \mu\rho_1, \mu\rho_2 \rangle. \quad (8.55)$$

用 IWOP 技术直接对式(8.53)积分可导出 $S_3$ 的具体形式. 将式(8.12)代入式(8.53)并积分，有

$$S_3 = \int \frac{\mathrm{d}\rho \mathrm{d}\chi_1 \mathrm{d}\chi_2}{\mu^{3/2}} \left| \frac{\rho}{\mu}, \frac{\chi_1}{\mu}, \frac{\chi_2}{\mu} \right\rangle \langle \rho, \chi_1, \chi_2 |$$

$$= \left(\frac{2\mu}{1+\mu^2}\right)^{3/2} : \exp\left\{ -\left(1 - \frac{2\mu}{1+\mu^2}\right) \sum_{j=1}^{3} a_j^\dagger a_j - \frac{\mu^2-1}{6(\mu^2+1)} [2a_1^{\dagger 2} - a_2^{\dagger 2} + 2a_3^{\dagger 2} + 4a_1^\dagger a_2^\dagger - 2a_1^\dagger a_3^\dagger + 4a_2^\dagger a_3^\dagger] + \frac{\mu^2-1}{6(\mu^2+1)} [2a_1^2 - a_2^2 + 2a_3^2 + 4a_1 a_2 - 2a_1 a_3 + 4a_2 a_3] \right\} \quad (8.56)$$

令 $\mu = \mathrm{e}^\lambda$, $\tanh\lambda = \frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}$, $\mathrm{sech}\lambda = \frac{2\mu}{\mu^2+1}$，并根据算符公式

$$\mathrm{e}^{ka^\dagger a} = : \exp[(\mathrm{e}^k - 1) a^\dagger a] : \quad (8.57)$$

将式(8.56)变为

$$S_3 = (\mathrm{sech}\lambda)^{3/2} : \exp\left[ -W^\dagger \tanh\lambda - (1 - \mathrm{sech}\lambda) \sum_{j=1}^{3} a_j^\dagger a_j + W \tanh\lambda \right] :$$

$$= (\mathrm{sech}\lambda)^{3/2} \exp(-W^\dagger \tanh\lambda) \exp(B \ln \mathrm{sech}\lambda) \exp(W \tanh\lambda), \quad (8.58)$$

其中：

$$W^{\dagger} = \frac{1}{6}(2a_1^{\dagger 2} - a_2^{\dagger 2} + 2a_3^{\dagger 2}) - \frac{1}{3}(2a_1^{\dagger} a_2^{\dagger} - a_1^{\dagger} a_3^{\dagger} + 2a_2^{\dagger} a_3^{\dagger}), \tag{8.59}$$

$$B = -\sum_{j=1}^{3} a_j^{\dagger} a_j - \frac{3}{2}. \tag{8.60}$$

很容易证明 $W^{\dagger}, W, B$ 构成封闭的 $SU(1,1)$李代数，即

$$[W^{\dagger}, W] = -B, \quad [W^{\dagger}, B] = -2W^{\dagger}, \quad [B, W] = -2W. \tag{8.61}$$

这暗示了一种求多模 $SU(1,1)$生成元的新方法.

## 8.5 三模纠缠 Wigner 算符

根据式(8.11)与式(8.24)的完备性，能够把在三模 Fock 空间中的任一算符$\hat{H}(a_1^{\dagger}, a_1; a_2^{\dagger}, a_2; a_3^{\dagger}, a_3)$写成

$$\hat{H} = \int \mathrm{d}\rho' \mathrm{d}\chi_1' \mathrm{d}\chi_2' \int \mathrm{d}\chi' \mathrm{d}\rho_1' \mathrm{d}\rho_2' \int \mathrm{d}\chi'' \mathrm{d}\rho_1'' \mathrm{d}\rho_2'' \int \mathrm{d}\rho'' \mathrm{d}\chi_1'' \mathrm{d}\chi_2'' \cdot$$
$$|\rho', \chi_1', \chi_2'\rangle\langle\rho', \chi_1', \chi_2' | \chi', \rho_1', \rho_2'\rangle\langle\chi', \rho_1', \rho_2' | \hat{H} | \chi'', \rho_1'', \rho_2''\rangle \cdot$$
$$\langle\chi'', \rho_1'', \rho_2'' | \rho'', \chi_1'', \chi_2''\rangle\langle\rho'', \chi_1'', \chi_2''|. \tag{8.62}$$

作为式(8.39)的结果，上式就变为

$$\hat{H} = \frac{1}{36(2\pi)^3} \int \mathrm{d}\rho' \mathrm{d}\chi_1' \mathrm{d}\chi_2' \int \mathrm{d}\chi' \mathrm{d}\rho_1' \mathrm{d}\rho_2' \int \mathrm{d}\chi'' \mathrm{d}\rho_1'' \mathrm{d}\rho_2'' \int \mathrm{d}\rho'' \mathrm{d}\chi_1'' \mathrm{d}\chi_2'' \cdot$$
$$|\rho', \chi_1', \chi_2'\rangle\langle\rho'', \chi_1'', \chi_2''| \langle\chi', \rho_1', \rho_2' | \hat{H} | \chi'', \rho_1'', \rho_2''\rangle \cdot$$
$$\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{6}(\chi'\rho' - \chi''\rho'') + \frac{\mathrm{i}}{3}(\rho_2'\chi_2' - \chi_2''\rho_2'') + \right.$$
$$\left.\frac{\mathrm{i}}{2}(\rho_1'\chi_1' - \rho_1''\chi_1'')\right]. \tag{8.63}$$

做积分变数变换

$$\rho' = p - \rho, \quad \chi_1' = x_{13} - \chi_1, \quad \chi_2' = x_{123} - \chi_2,$$

$$\rho'' = p + \rho, \quad \chi_1'' = x_{13} + \chi_1, \quad \chi_2'' = x_{123} + \chi_2,$$
$$\chi' = q - \chi, \quad \rho_1' = p_{13} - \rho_1, \quad \rho_2' = p_{123} - \rho_2,$$
$$\chi'' = q + \chi, \quad \rho_1'' = p_{13} + \rho_1, \quad \rho_2'' = p_{123} + \rho_2, \tag{8.64}$$

其中新变数为：

$$p \equiv p_1 - 2p_2 + p_2, \quad q \equiv x_1 - 2x_2 + x_3,$$
$$x_{123} \equiv x_1 + x_2 + x_3, \quad x_{13} \equiv x_1 - x_3, \tag{8.65}$$
$$p_{123} \equiv p_1 + p_2 + p_3, \quad p_{13} \equiv p_1 - p_3,$$

以及相应的 Jacobi(雅各比)变换

$$\int d\rho' d\chi_1' d\chi_2' d\rho'' d\chi_1'' d\chi_2'' = 8\int d\rho d\chi_1 d\chi_2 dp\, dx_{13}\, dx_{123},$$
$$\int d\chi' d\rho_1' d\rho_2' d\chi'' d\rho_1'' d\rho_2'' = 8\int d\chi d\rho_1 d\rho_2 dq\, dp_{13}\, dp_{123}, \tag{8.66}$$

于是，式(8.63)改写为

$$\hat{H} = \frac{2}{9}\int dp\, dx_{13}\, dx_{123} \int dq\, dp_{13}\, dp_{123} \Delta_3 h(p, x_{13}, x_{123}; q, p_{13}, p_{123}), \tag{8.67}$$

式中：

$$\Delta_3 \equiv \int \frac{d\rho d\chi_1 d\chi_2}{\pi^3} \exp\left(\frac{i}{3} q\rho - i p_{13}\chi_1 - \frac{2i}{3} p_{123}\chi_2\right) \cdot$$
$$| p - \rho, x_{13} - \chi_1, x_{123} - \chi_2 \rangle \langle p + \rho, x_{13} + \chi_1, x_{123} + \chi_2 | \tag{8.68}$$

是表示在纠缠态表象$|\rho, \chi_1, \chi_2\rangle$中．将式(8.12)代人式(8.68)，借助 IWOP 技术直接对式(8.68)积分有

$$\Delta_3 = \frac{1}{\pi^3} \prod_{j=1}^{3} :\exp\left[-2\left(\frac{x_j - i p_j}{\sqrt{2}} - a_j^\dagger\right)\left(\frac{x_j + i p_j}{\sqrt{2}} - a_j\right)\right]:. \tag{8.69}$$

比较单模 Wigner 算符形式

$$\Delta(\alpha) = \int \frac{d^2 z}{\pi} | \alpha + z \rangle \langle \alpha - z | e^{\alpha z^* - z\alpha^*}$$

$$=\frac{1}{\pi}:\exp[-2(a^{\dagger}-\alpha^{*})(a-\alpha)]:,\qquad(8.70)$$

式中：$\alpha=\frac{x-\mathrm{i}p}{\sqrt{2}}$. 可知

$$\Delta_3=\Delta(\alpha_1)\Delta(\alpha_2)\Delta(\alpha_3),\qquad(8.71)$$

这正是三个单模 Wigner 算符的直积，因此称 $\Delta_3$ 为有关$|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle$的三模纠缠 Wigner 算符. 也可以证明

$$\int\Delta_3\mathrm{d}p\mathrm{d}x_{13}\mathrm{d}x_{123}\mathrm{d}q\mathrm{d}p_{13}\mathrm{d}p_{123}=1.\qquad(8.72)$$

所以，式(8.67)可理解为$\hat{H}$在一个新的完备集中展开，其展开函数 $h(p,x_{13},x_{123};q,p_{12},p_{123})$就是算符$\hat{H}$的经典 Weyl 对应. 从式(8.63)和式(8.68)可得到

$$\begin{aligned}&h(p,x_{13},x_{123};q,p_{12},p_{123})\\&=\int\mathrm{d}\chi\mathrm{d}\rho_1\mathrm{d}\rho_2\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{3}p\chi-\mathrm{i}x_{13}\rho_1-\frac{2\mathrm{i}}{3}x_{123}\rho_2\right)\cdot\\&\quad\langle q-\chi,p_{13}-\rho_1,p_{123}-\rho_2\mid\hat{H}\mid q+\chi,p_{13}+\rho_1,p_{123}+\rho_2\rangle,\end{aligned}\qquad(8.73)$$

这也称为$\langle q-\chi,p_{13}-\rho_1,p_{123}-\rho_2|\hat{H}|q+\chi,p_{13}+\rho_1,p_{123}+\rho_2\rangle$的 Weyl 变换式，(8.67)～式(8.73)展现了纠缠形式的 Weyl-Wigner 量子化方案.

另一方面，式(8.68)也可改写成

$$\begin{aligned}\Delta_3=&\frac{1}{\pi^3}:\exp\Big\{-\frac{1}{6}(p^2+q^2)-\frac{1}{2}(x_{13}^2+p_{13}^2)-\frac{1}{3}(x_{123}^2+p_{123}^2)+\\&\frac{\mathrm{i}\sqrt{2}}{6}p(a_1^{\dagger}-2a_2^{\dagger}+a_3^{\dagger}-a_1+2a_2-a_3)+\\&\frac{\sqrt{2}}{6}q(a_1^{\dagger}-2a_2^{\dagger}+a_3^{\dagger}+a_1-2a_2+a_3)+\\&\frac{\sqrt{2}}{2}x_{13}(a_1^{\dagger}-a_3^{\dagger}+a_1-a_3)-\frac{\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}p_{13}(a_1-a_3-a_1^{\dagger}+a_3^{\dagger})-\end{aligned}$$

$$2\sum_{j=1}^{3} a_j^\dagger a_j + \frac{\sqrt{2}x_{123}}{3}\sum_{j=1}^{3}(a_j + a_j^\dagger) - \frac{\mathrm{i}\sqrt{2}p_{123}}{3}\sum_{j=1}^{3}(a_j - a_j^\dagger)\Big\}:,$$
(8.74)

式中:参量$p$,$q_{13}$,$q_{123}$,$q$,$p_{13}$,$p_{123}$已在式(8.65)中定义. 接下来,可以计算出下列三重积分,即

$$\int \mathrm{d}p\,\mathrm{d}x_{13}\,\mathrm{d}x_{123}\,\Delta(p, q_{13}, q_{123}; q, p_{13}, p_{123})$$
$$= \frac{6}{\pi^{3/2}} : \exp\Big\{-\frac{1}{6}(q^2 + 3p_{13}^2 + 2p_{123}^2) +$$
$$\frac{\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}p_{13}[(a_1^\dagger - a_3^\dagger) - (a_1 - a_3)] + \frac{\mathrm{i}\sqrt{2}}{3}p_{123}\sum_{j=1}^{3}(a_j^\dagger - a_j) +$$
$$\frac{\sqrt{2}}{6}q[(a_1^\dagger - 2a_2^\dagger + a_3^\dagger) + (a_1 - 2a_2 + a_3)] +$$
$$\frac{1}{6}[(2a_1^{\dagger 2} - a_2^{\dagger 2} + 2a_3^{\dagger 2}) + (2a_1^2 - a_2^2 + 2a_3^2)] +$$
$$\frac{1}{3}[(2a_1^\dagger a_2^\dagger - a_1^\dagger a_3^\dagger + 2a_2^\dagger a_3^\dagger) +$$
$$(2a_1a_2 - a_1a_3 + 2a_2a_3)] - \sum_{j=1}^{3} a_j^\dagger a_j\Big\}:. \quad (8.75)$$

比较式(8.75)与式(8.20)并考虑$|000\rangle\langle 000| = :\exp(-\sum_{j=1}^{3}a_j^\dagger a_j):$,可以导出

$$\int \mathrm{d}p\,\mathrm{d}x_{13}\,\mathrm{d}x_{123}\,\Delta_3 = 36\,|\chi, \rho_1, \rho_2\rangle\langle\chi, \rho_1, \rho_2|_{\chi\to q, \rho_1\to p_{13}, \rho_2\to p_{123}}.$$
(8.76)

对于一个三模态$|\Psi\rangle$,它的 Wigner 函数$W_\Psi = \langle\Psi|\Delta_3|\Psi\rangle$的边缘分布为

$$\int \mathrm{d}p\,\mathrm{d}x_{13}\,\mathrm{d}x_{123}\,W_\Psi = 36\langle\Psi|\chi, \rho_1, \rho_2\rangle\langle\chi, \rho_1, \rho_2|\Psi\rangle_{\chi\to q, \rho_1\to p_{13}, \rho_2\to p_{123}}$$
$$= 36\langle\Psi|(\chi, \rho_1, \rho_2)|^2_{\chi\to q, \rho_1\to p_{13}, \rho_2\to p_{123}}, \quad (8.77)$$

该结果表明同时测量$\hat{P}_1 - \hat{P}_3$为$\rho_1$,测量$\hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \hat{P}_3$为$\rho_2$,测量

$\hat{X}_1 - 2\hat{X}_2 + \hat{X}_3$为 $\chi$ 的几率. 类似地,对 $\mathrm{d}q\,\mathrm{d}p_{13}\mathrm{d}p_{123}$作积分有

$$\int \mathrm{d}q\,\mathrm{d}p_{13}\mathrm{d}p_{123}\Delta_3 = 36 \mid \rho,\chi_1,\chi_2\rangle\langle\rho,\chi_1,\chi_2 \mid_{\rho\to p,\chi_1\to x_{13},\chi_2\to x_{123}}. \tag{8.78}$$

很显然,$W_\Psi$ 的另一边缘分布为

$$\int \mathrm{d}q\,\mathrm{d}p_{13}\mathrm{d}p_{123}W_\Psi = 36\langle\Psi \mid \rho,\chi_1,\chi_2\rangle\langle\rho,\chi_1,\chi_2 \mid \Psi\rangle_{\rho\to p,\chi_1\to x_{13},\chi_2\to x_{123}}$$
$$= 36 \mid \Psi(\rho,\chi_1,\chi_2) \mid^2_{\rho\to p,\chi_1\to x_{13},\chi_2\to x_{123}}. \tag{8.79}$$

根据式(8.68)中 $\Delta_3$ 的形式,能方便得到$|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle$的 Wigner 函数. 实际上,利用式(8.19)的正交性,有

$$\begin{aligned}
W_{|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle} &\equiv \langle\rho,\chi_1,\chi_2 \mid \Delta_3 \mid \rho,\chi_1,\chi_2\rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}\rho'\mathrm{d}\chi_1'\mathrm{d}\chi_2'}{\pi^3}\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{3}q\rho' - \mathrm{i}p_{13}\chi_1' - \frac{2\mathrm{i}}{3}p_{123}\chi_2'\right)\cdot \\
&\quad \delta(p-\rho'-\rho)\delta(x_{13}-\chi_1'-\chi_1)\delta(x_{123}-\chi_2'-\chi_2)\cdot \\
&\quad \delta(p+\rho'-\rho)\delta(x_{13}+\chi_1'-\chi_1)\delta(x_{123}+\chi_2'-\chi_2) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\delta(p-\rho)\delta(x_{13}-\chi_1)\delta(x_{123}-\chi_2),
\end{aligned} \tag{8.80}$$

这完全与$|\rho,\chi_1,\chi_2\rangle$的物理意义吻合. 对于新的压缩真空态$|\lambda\rangle \equiv S_3\,|000\rangle$(也是一个广义 $SU(1,1)$相干态),

$$\mid\lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}\,\pi^{3/4}}\int\frac{\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\chi_1\mathrm{d}\chi_2}{\mu^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{12}(\rho^2+3\chi_1^2+2\chi_2^2)}\left|\frac{\rho}{\mu},\frac{\chi_1}{\mu},\frac{\chi_2}{\mu}\right\rangle, \tag{8.81}$$

其中:已考虑式(8.12)和式(8.53). 相应的 Wigner 函数可直接导出:

$$\begin{aligned}
W_{|\lambda\rangle} &\equiv \langle\lambda \mid \Delta_3 \mid \lambda\rangle \\
&= \frac{1}{6\pi^{3/2}}\int\frac{\mathrm{d}\rho'\mathrm{d}\chi_1'\mathrm{d}\chi_2'}{(\pi\mu)^3}\int\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\chi_1\mathrm{d}\chi_2\int\mathrm{d}\rho''\mathrm{d}\chi_1''\mathrm{d}\chi_2''\exp\Big[\frac{\mathrm{i}}{3}q\rho - \mathrm{i}p_{13}\chi_1 - \\
&\quad \frac{2\mathrm{i}}{3}p_{123}\chi_2 - \frac{1}{12}(\rho''^2+3\chi_1''^2+2\chi_2''^2) - \frac{1}{12}(\rho'^2+3\chi_1'^2+2\chi_2'^2)\Big]\cdot \\
&\quad \delta\left(\frac{\rho'}{\mu}-p+\rho\right)\delta\left(\frac{\chi_1'}{\mu}-x_{13}+\chi_1\right)\delta\left(\frac{\chi_2'}{\mu}-x_{123}+\chi_2\right)\cdot
\end{aligned}$$

$$\delta\left(p+\rho-\frac{\rho''}{\mu}\right)\delta\left(x_{13}+\chi_1-\frac{\chi_1''}{\mu}\right)\delta\left(x_{123}+\chi_2-\frac{\chi_2''}{\mu}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi^3}\exp\left[-\frac{1}{6}e^{-2\lambda}(q^2+3p_{13}^2+2p_{123}^2)-\right.$$

$$\left.\frac{1}{6}e^{2\lambda}(p^2+3x_{13}^2+2x_{123}^2)\right], \tag{8.82}$$

它在两组互为共轭的变量上分别展现了压缩因子 $e^{-2\lambda}$ 与 $e^{2\lambda}$. 利用式(8.68),也可以找到压缩算符 $S_3$ 的经典 Weyl 对应函数,即

$$\mathrm{tr}(S_3\Delta_3)=\int\frac{d\rho' d\chi_1' d\chi_2'}{\mu^{3/2}}\left\langle\rho',\chi_1',\chi_2'\right|\Delta_3\left|\frac{\rho'}{\mu},\frac{\chi_1'}{\mu},\frac{\chi_2'}{\mu}\right\rangle$$

$$=\left(\frac{\mathrm{sech}\,\frac{\lambda}{2}}{2\pi}\right)^3\exp\left[\frac{i}{3}\tanh\frac{\lambda}{2}(qp-2p_{13}x_{13}-2p_{123}x_{123})\right], \tag{8.83}$$

这里已用了

$$\frac{1-\mu}{1+\mu}=\tanh\frac{\lambda}{2},\quad \frac{\mu^{1/2}}{\mu+1}=\frac{1}{2}\mathrm{sech}\,\frac{\lambda}{2}. \tag{8.84}$$

# 第 9 章 用 IWOP 技术求热场动力学中的热真空态

在自然界中，很难找到一个绝对孤立体系，大多数系统都处在一个热库中，这是造成量子退相干的原因之一. 1975 年，Takahashi 和 Umezawa 提出了热场动力学(TFD)理论[158]. 在 TFD 中，将一个算符$\hat{A}$的纯态(记为$|0(\beta)\rangle$)平均值来代替在温度 $T$ 下的量子统计意义下的平均值(系统平均)

$$\langle\hat{A}\rangle = \langle 0(\beta) \mid \hat{A} \mid 0(\beta)\rangle = Z^{-1}(\beta)\mathrm{tr}(\hat{A}\mathrm{e}^{-\beta\hat{H}}), \tag{9.1}$$

其中：$Z(\beta)=\mathrm{tr}\mathrm{e}^{-\beta\hat{H}}$为系统的配分函数，$\beta=1/kT$，$k$ 是玻耳兹曼常数，$\hat{H}$为体系哈密顿量. 这里$|0(\beta)\rangle$是一个温度有关的"真空"态，那么能否找到$|0(\beta)\rangle$呢? 因此，对于一个给定的系统，如何求出$|0(\beta)\rangle$是至关重要的.

Takahashi 和 Umezawa 的方法是将$|0(\beta)\rangle$用系统哈密顿量$\hat{H}$的本征态$|n\rangle$($\hat{H}|n\rangle=E_n|n\rangle$)展开

$$| 0(\beta)\rangle = \sum_n | n\rangle f_n(\beta), \tag{9.2}$$

将它代入预设的目标

$$\langle 0(\beta) \mid \hat{A} \mid 0(\beta)\rangle = Z^{-1}(\beta)\sum_n\langle n \mid \hat{A} \mid n\rangle \mathrm{e}^{-\beta E_n}, \tag{9.3}$$

得到

$$f_n^*(\beta)f_m(\beta) = Z^{-1}(\beta)\mathrm{e}^{-\beta E_n}\delta_{nm}. \tag{9.4}$$

由于右边 $\delta_{nm}$ 的出现，他们引入另一虚构的希尔伯特空间，它由虚态矢$|\tilde{n}\rangle$张成，$\langle\tilde{n}|\tilde{m}\rangle=\delta_{nm}$. 而热真空态$|0(\beta)\rangle$就在$|n\rangle\otimes|\tilde{m}\rangle$的直积空间中构造. 让

$$f_n(\beta) = |\,\tilde{n}\rangle Z^{-1/2}(\beta)\mathrm{e}^{-\beta E_n}, \tag{9.5}$$

则式(9.4)可以满足. 将式(9.5)代入式(9.2),得到

$$|\,0(\beta)\rangle = Z^{-1/2}(\beta)\sum_n \mathrm{e}^{-\beta E_n/2}\,|\,n,\tilde{n}\rangle. \tag{9.6}$$

这样就必须使每一个物理态$|n\rangle$由一个虚态$|\tilde{n}\rangle$相伴,例如对于一个谐振子系统这就是$\hat{H}_1=\omega a^\dagger a$(略去零点能,令 $\hbar=1$),则相应的热真空态为

$$|\,0(\beta)\rangle = (1-\mathrm{e}^{-\beta\omega})^{1/2}\exp(\mathrm{e}^{-\frac{\beta\omega}{2}}a^\dagger\tilde{a}^\dagger)\,|\,0\tilde{0}\rangle, \tag{9.7}$$

但是 Takahashi 和 Umezawa 热场动力学的基本做法,对于复杂的系统,每个$a^\dagger$都要伴随一个$\tilde{a}^\dagger$太复杂,所以,我们加以改进,采用 IWOP 技术导出对于给定的系统的$|0(\beta)\rangle$,以进一步发展热场动力学理论.

## 9.1 用 IWOP 技术导出的热真空态$|0(\beta)\rangle$

这里,我们采用 IWOP 技术导出谐振子系统$\hat{H}_1=\omega a^\dagger a$ 的热真空态$|0(\beta)\rangle$. 根据式(9.1),令$\rho=\mathrm{e}^{-\beta\hat{H}}/Z(\beta)$,希望找到一个在扩展了的空间中定义的态矢量$|\psi(\beta)\rangle$,使得

$$\langle\hat{A}\rangle = \mathrm{tr}(\rho\hat{A}) = \langle\psi(\beta)\,|\,\hat{A}\,|\,\psi(\beta)\rangle. \tag{9.8}$$

记 $\mathrm{Tr}=\mathrm{tr}\,\widetilde{\mathrm{tr}}$为对实-虚两个空间的求迹记号,其中 tr 与$\widetilde{\mathrm{tr}}$分别表示对实和虚空间中的求迹,则

$$\begin{aligned}\langle\psi(\beta)\,|\,\hat{A}\,|\,\psi(\beta)\rangle &= \mathrm{Tr}[\hat{A}\,|\,\psi(\beta)\rangle\langle\psi(\beta)\,|] \\ &= \mathrm{tr}[\hat{A}\,\widetilde{tr}(\,|\,\psi(\beta)\rangle\langle\psi(\beta)\,|\,)].\end{aligned} \tag{9.9}$$

由于$|\psi(\beta)\rangle$包含实空间和虚空间,则

$$\widetilde{\mathrm{tr}}(\,|\,\psi(\beta)\rangle\langle\psi(\beta)\,|\,) \neq \langle\psi(\beta)\,|\,\psi(\beta)\rangle. \tag{9.10}$$

把式(9.9)与式(9.8)比较,得

$$\widetilde{\mathrm{tr}}(\,|\,\psi(\beta)\rangle\langle\psi(\beta)\,|\,) = \mathrm{e}^{-\beta\hat{H}}/Z(\beta) = \rho. \tag{9.11}$$

这就提示我们对于一个给定的哈密顿量 $\hat{H}$，如果能找到一个 $|\psi(\beta)\rangle$ 态（它在扩展了的态空间中），它的部分求迹（在虚空间中）就应该等于密度算符 $\rho=\mathrm{e}^{-\beta\hat{H}}/Z(\beta)$[159]. 当取 $\hat{H}_1=\omega a^\dagger a$，由式(9.7)，就有

$$\widetilde{\mathrm{tr}}(|0(\beta)\rangle\langle 0(\beta)|)=(1-\mathrm{e}^{-\beta\omega})\mathrm{e}^{-\beta\omega a^\dagger a}\equiv\rho_c, \tag{9.12}$$

$\rho_c$ 就是热场的密度算符. 现在借助 IWOP 技术，根据这个想法来求出热真空态.

先求对 $\hat{H}_1=\omega a^\dagger a$ 的 $|\psi(\beta)\rangle$，由于

$$\mathrm{e}^{-\beta\hat{H}_1}=\mathrm{e}^{-\beta\omega a^\dagger a}=:\exp[(\mathrm{e}^{-\beta\omega}-1)a^\dagger a]:, \tag{9.13}$$

以及积分公式

$$\int\frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}\exp(-h|z|^2+\eta z^*+\xi z)=\frac{1}{h}\exp\left(\frac{\eta\xi}{h}\right)\quad \mathrm{Re}\,h>0, \tag{9.14}$$

用 IWOP 积分技术可将式(9.13)改写为

$$\mathrm{e}^{-\beta\hat{H}_1}=\int\frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}:\exp(-|z|^2+z^* a^\dagger\mathrm{e}^{-\beta\omega/2}+za\,\mathrm{e}^{-\beta\omega/2}-a^\dagger a):. \tag{9.15}$$

注意到 $:\mathrm{e}^{-a^\dagger a}:=|0\rangle\langle 0|$ 为实真空态的投影算子，于是上式右边可改写为

$$\mathrm{e}^{-\beta\hat{H}_1}=\int\frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}\mathrm{e}^{z^* a^\dagger\mathrm{e}^{-\beta\omega/2}}|0\rangle\langle 0|\mathrm{e}^{za\mathrm{e}^{-\beta\omega/2}}\langle\tilde{z}|\tilde{0}\rangle\langle\tilde{0}|\tilde{z}\rangle, \tag{9.16}$$

其中：$|\tilde{z}\rangle$ 是在虚空间中的相干态

$$|\tilde{z}\rangle=\exp(z\tilde{a}^\dagger-z^*\tilde{a})|\tilde{0}\rangle,\quad \tilde{a}|\tilde{z}\rangle=z|\tilde{z}\rangle,$$
$$\langle\tilde{0}|\tilde{z}\rangle=\mathrm{e}^{-|z|^2/2}. \tag{9.17}$$

由于虚-实空间中的算符都相互对易，实空间中的算符对虚态也不起作用，再利用 $\tilde{a}|\tilde{z}\rangle=z|\tilde{z}\rangle$，式(9.16)可改写为

$$\mathrm{e}^{-\beta\hat{H}_1}=\int\frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}\langle\tilde{z}|\mathrm{e}^{z^* a^\dagger\mathrm{e}^{-\beta\omega/2}}|0\tilde{0}\rangle\langle\tilde{0}0|\mathrm{e}^{za\mathrm{e}^{-\beta\omega/2}}|\tilde{z}\rangle$$

$$=\int \frac{d^2 z}{\pi}\langle \tilde{z} \mid e^{\tilde{a}^\dagger a^\dagger e^{-\beta\omega/2}} \mid 0\tilde{0}\rangle\langle \tilde{0}0 \mid e^{\tilde{a}a e^{-\beta\omega/2}} \mid \tilde{z}\rangle$$

$$=\tilde{\mathrm{tr}}\left[\int \frac{d^2 z}{\pi} \mid \tilde{z}\rangle\langle \tilde{z} \mid (e^{a^\dagger \tilde{a}^\dagger e^{-\beta\omega/2}} \mid 0\tilde{0}\rangle\langle \tilde{0}0 \mid e^{a\tilde{a} e^{-\beta\omega/2}})\right].$$

(9.18)

对照式(9.11)并注意到

$$\int \frac{d^2 z}{\pi} \mid \tilde{z}\rangle\langle \tilde{z} \mid = 1,\quad Z(\beta) = \mathrm{tr}e^{-\beta \hat{H}_1} = 1-e^{-\beta\omega},\quad (9.19)$$

可见所求的态是

$$\mid \psi(\beta)\rangle = \sqrt{1-e^{-\beta\omega}}\exp[a^\dagger \tilde{a}^\dagger e^{-\beta\omega/2}] \mid 0\tilde{0}\rangle.\qquad (9.20)$$

这恰好是式(9.7)中的热真空态. 以上推导表明,只要用 IWOP 技术把 $e^{-\beta\hat{H}}$ 用扩展在虚-实空间的态矢的$\tilde{\mathrm{tr}}$形式来表示即可,而不需要像 Takahashi 和 Umezawa 那样引入 $\delta_{nm}=\langle \tilde{n}|\tilde{m}\rangle$. 这种新做法推广到其他复杂的系统,例如 $\hat{H}_2=\omega a^\dagger a+\kappa^* a^{\dagger 2}+\kappa a^2$ 的广义热真空态以及 $\hat{H}_3=\omega(a^\dagger a+b^\dagger b)+g^* a^\dagger b^\dagger+\kappa ab$ 的双模热真空态,分别见下面两节内容.

## 9.2 广义的热真空态 $|\phi(\beta)\rangle$

### 9.2.1 用 IWOP 技术导出 $|\phi(\beta)\rangle$

考虑系统为简并参量放大器时,其哈密顿量为($\hbar=1$)

$$\hat{H}_2 = \omega a^\dagger a + \kappa^* a^{\dagger 2} + \kappa a^2,\qquad (9.21)$$

相应的归一化密度算符[159]

$$\rho(\mathrm{tr}e^{-\beta\hat{H}_2}) = e^{-\beta\hat{H}_2} = \exp[-\beta(\omega a^\dagger a + \kappa^* a^{\dagger 2} + \kappa a^2)].$$

(9.22)

由于$\left(a^\dagger a+\frac{1}{2}\right)$,$\frac{1}{2}a^{\dagger 2}$,$\frac{1}{2}a^2$ 满足 $SU(1,1)$李代数,在文献[160]

中的第二篇文章中已经导出一个广义算符恒等式(但未用李代数方法):

$$\exp[fa^\dagger a + ga^{\dagger 2} + ka^2]$$
$$= e^{-f/2}\exp\left(\frac{ga^{\dagger 2}}{\mathscr{D}\coth\mathscr{D} - f}\right)\exp\left[\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\ln\frac{\mathscr{D}\,\mathrm{sech}\,\mathscr{D}}{\mathscr{D} - f\tanh\mathscr{D}}\right]$$
$$\exp\left(\frac{ka^2}{\mathscr{D}\coth\mathscr{D} - f}\right), \tag{9.23}$$

式中:$\mathscr{D}^2 = f^2 - 4kg$. 根据式(9.23),式(9.22)可改写为

$$(\mathrm{tr}e^{-\beta\hat{H}_2})\rho = \sqrt{\lambda e^{\beta\omega}}\exp(E^* a^{\dagger 2})\exp(a^\dagger a\ln\lambda)\exp(Ea^2), \tag{9.24}$$

其中:

$$\lambda = \frac{D}{\omega\sinh(\beta D) + D\cosh(\beta D)},\quad E = \frac{-\lambda}{D}\kappa\sinh(\beta D),$$
$$D^2 = \omega^2 - 4|\kappa|^2. \tag{9.25}$$

同样地,利用式(9.13)与式(9.16)中的公式,有

$$(\mathrm{tr}e^{-\beta\hat{H}_2})\rho = \sqrt{\lambda e^{\beta\omega}}\exp(E^* a^{\dagger 2}) : \exp[(\lambda - 1)a^\dagger a] : \exp(Ea^2)$$
$$= \sqrt{\lambda e^{\beta\omega}}\int\frac{d^2 z}{\pi}e^{E^* a^{\dagger 2} + \sqrt{\lambda}z^* a^\dagger}|0\rangle\langle 0|e^{Ea^2 + \sqrt{\lambda}za}\langle\tilde{z}|\tilde{0}\rangle\langle\tilde{0}|\tilde{z}\rangle$$
$$= \sqrt{\lambda e^{\beta\omega}}\int\frac{d^2 z}{\pi}\langle\tilde{z}|e^{E^* a^{\dagger 2} + \sqrt{\lambda}z^* a^\dagger}|0\tilde{0}\rangle\langle\tilde{0}0 e^{Ea^2 + \sqrt{\lambda}za}|\tilde{z}\rangle$$
$$= \sqrt{\lambda e^{\beta\omega}}\,\tilde{\mathrm{tr}}[e^{E^* a^{\dagger 2} + \sqrt{\lambda}a^\dagger\tilde{a}^\dagger}|0\tilde{0}\rangle\langle\tilde{0}0|e^{Ea^2 + \sqrt{\lambda}a\tilde{a}}]$$
$$\equiv(\mathrm{tr}e^{-\beta\hat{H}_2})\,\tilde{\mathrm{tr}}[|\phi(\beta)\rangle\langle\phi(\beta)|], \tag{9.26}$$

这说明了对于式(9.21)中的哈密顿量在扩展空间里的纯态可表示为

$$|\phi(\beta)\rangle = \sqrt{\frac{\lambda^{1/2}e^{\beta\omega/2}}{Z(\beta)}}e^{E^* a^{\dagger 2} + \sqrt{\lambda}a^\dagger\tilde{a}^\dagger}|0\tilde{0}\rangle, \tag{9.27}$$

式中:配分函数 $Z(\beta)$ 为

$$Z(\beta) = \mathrm{tr}e^{-\beta\hat{H}_2} = \mathrm{tr}[\sqrt{\lambda e^{\beta\omega}}e^{E^* a^{\dagger 2}} : e^{(\lambda-1)a^\dagger a} : e^{Ea^2}]. \tag{9.28}$$

用相干态完备性 $\int\frac{d^2 z}{\pi}|z\rangle\langle z| = 1$ 以及积分公式

$$\int \frac{d^2 z}{\pi} \exp(\zeta \mid z \mid^2 + \xi z + \eta z^* + f z^2 + g z^{*2})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 4fg}} \exp\left(\frac{-\zeta\xi\eta + \xi^2 g + \eta^2 f}{\zeta^2 - 4fg}\right), \tag{9.29}$$

要求 $\mathrm{Re}(\zeta \pm f \pm g) < 0, \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta^2 - 4fg}{\zeta \pm f \pm g}\right) < 0$，可以得到

$$Z(\beta) = \sqrt{\frac{\lambda e^{\beta\omega}}{(1-\lambda)^2 - 4 \mid E \mid^2}} = \frac{e^{\beta\omega/2}}{2\sinh(\beta D/2)}. \tag{9.30}$$

因此，对式(9.21)的在扩展空间中归一化态可给出

$$\mid \phi(\beta) \rangle = \sqrt{2\lambda^{1/2} \sinh(\beta D/2)}\, e^{E^* a^{\dagger 2} + \sqrt{\lambda} a^\dagger \tilde{a}^\dagger} \mid 0\tilde{0} \rangle, \tag{9.31}$$

此外，也可以得到该系统的内能（下标 e 表示系综平均）

$$\langle \hat{H}_2 \rangle_e = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z(\beta) = \frac{D \coth(\beta D/2) - \omega}{2}, \tag{9.32}$$

这与文献[161]中用广义 Feynman-Hellmann 定理（GHFT）求得结果是一致的，熵的分布[162]

$$S = -\kappa \mathrm{tr}(\rho \ln \rho) = \frac{1}{T} \langle H \rangle_e + \kappa \ln Z(\beta)$$

$$= \frac{D}{2T} \coth(\beta D/2) - \kappa \ln[2\sinh(\beta D/2)]. \tag{9.33}$$

特别地，当取 $\kappa = 0$，就有 $D = \omega$，所以式(9.31)就退化为式(9.7)中的热真空态 $|0(\beta)\rangle$ 以及式(9.32)和式(9.33)分别变为 $\frac{\omega}{2}[\coth(\beta\omega/2) - 1]$ 与 $\frac{\omega}{2T}\coth(\beta\omega/2) - \kappa \ln[2\sinh(\beta\omega/2)]$，这也与文献[163]的结果一样.

### 9.2.2 用 $|\phi(\beta)\rangle$ 导出系统的内能分布

有了热真空态式(9.31)的形式，可用它来评估相应哈密顿量中各项对系综能量的贡献. 根据式(9.1)的思想，算符 $\hat{A}$ 的平均值通过 $\langle \hat{A} \rangle_e = \langle \phi(\beta) | \hat{A} | \phi(\beta) \rangle$ 来计算而得. 利用相干态完备性以及

式(9.29)的积分公式,并注意$\langle\phi(\beta)|\phi(\beta)\rangle=1$,$(1-\lambda)^2-4|E|^2=4\lambda\sinh^2(\beta D/2)$,就有

$$\begin{aligned}
\langle\omega a^{\dagger}a\rangle_e &= \omega\langle\phi(\beta)\mid(aa^{\dagger}-1)\mid\phi(\beta)\rangle \\
&= 2\lambda^{1/2}\sinh(\beta D/2)\langle 0\tilde{0}\mid e^{Ea^2+\sqrt{\lambda}a\tilde{a}}a\int\frac{d^2z}{\pi}\mid z\rangle \\
&\quad \langle z\mid a^{\dagger}e^{E^*a^{\dagger 2}+\sqrt{\lambda}a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger}}\mid 0\tilde{0}\rangle-\omega \\
&= 2\omega\lambda^{1/2}\sinh(\beta D/2)\frac{\partial}{\partial\lambda}\int\frac{d^2z}{\pi}e^{-(1-\lambda)|z|^2+Ez^2+E^*z^{*2}}-\omega \\
&= 2\omega\lambda^{1/2}\sinh(\beta D/2)\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{\sqrt{(1-\lambda)^2-4\mid E\mid^2}}-\omega \\
&= \frac{\omega}{2}\left[\frac{\omega}{D}\coth(\beta D/2)-1\right],
\end{aligned} \tag{9.34}$$

$$\begin{aligned}
\langle\kappa^* a^{\dagger 2}\rangle_e &= 2\kappa^*\lambda^{1/2}\sinh(\beta D/2)\frac{\partial}{\partial E^*}\frac{1}{\sqrt{(1-\lambda)^2-4EE^*}} \\
&= -\frac{|\kappa|^2}{D}\coth(\beta D/2),
\end{aligned} \tag{9.35}$$

$$\langle\kappa a^2\rangle_e = -\frac{|\kappa|^2}{D}\coth(\beta D/2). \tag{9.36}$$

从式(9.35)和式(9.36)看出,$\kappa^* a^{\dagger 2}$ 与 $\kappa a^2$ 的两项对系统能量的贡献是一样的. 联合式(9.45)~(9.46),也能检验式(9.32)的结果.

### 9.2.3 $|\phi(\beta)\rangle$的 Wigner 函数与量子 Tomogram

利用式(9.31)还能计算出它的 Wigner 函数与量子 Tomogram. 为此,考虑在相干态表象中 Wigner 算符 $\Delta(z)$的形式

$$\Delta(\alpha)=e^{2|\alpha|^2}\int\frac{d^2z}{\pi^2}\mid z\rangle\langle -z\mid e^{-2(z\alpha^*-z^*\alpha)}, \tag{9.37}$$

则$|\phi(\beta)\rangle$的 Wigner 函数为

$$\begin{aligned}
W(\alpha) &= \langle\phi(\beta)\mid\Delta(\alpha)\mid\phi(\beta)\rangle \\
&= e^{2|\alpha|^2}\int\frac{d^2z}{\pi}\langle\phi(\beta)\mid z\rangle\langle -z\mid\phi(\beta)\rangle e^{-2(z\alpha^*-z^*\alpha)}
\end{aligned}$$

$$=2\lambda^{1/2}\sinh(\beta D/2)\mathrm{e}^{2|\alpha|^2}\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi^2}\mathrm{e}^{-(1+\lambda)|z|^2-2\alpha^*z+2\alpha z^*+Ez^2+E^*z^{*2}}$$

$$=\frac{\tanh(\beta D/2)}{\pi}\exp\left\{-\frac{2}{D}[\omega\mid\alpha\mid^2+(\kappa\alpha^2+\kappa^*\alpha^{*2})]\cdot\right.$$

$$\left.\tanh(\beta D/2)\right\},\tag{9.38}$$

这里已用 $(1+\lambda)^2-4\mid E\mid^2=\frac{4D\cosh^2(\beta D/2)}{\omega\sinh\beta D+D\mathrm{conh}\beta D}$ 和积分公式(9.29). 特别地,当 $\kappa=0$ 时,上式的结果就变为

$$W(\alpha)=\frac{\tanh(\beta D/2)}{\pi}\exp\{-2\mid\alpha\mid^2\tanh(\beta D/2)\},\tag{9.39}$$

这就是谐振子的热真空态的 Wigner 函数[164].

根据 Wigner 算符的 Radon 变换可以表示为中介表象 $|q\rangle_{f,g}$ 的纯态密度算符,即[165]

$$\int\delta(q-fq'-gp')\Delta(\alpha)\mathrm{d}q'\mathrm{d}p'=\mid q\rangle_{f,g\,g,f}\langle q\mid,\tag{9.40}$$

式中:$\alpha=(q+\mathrm{i}p)/\sqrt{2}$,$(f,g)$都是实数,而

$$\mid q\rangle_{f,g}=C\exp\left[\frac{\sqrt{2}}{A}qa^\dagger-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\varphi}}{2}a^{\dagger2}\right]\mid 0\rangle,\tag{9.41}$$

其中:$C=[\pi(f^2+g^2)]^{-1/4}\exp\{-q^2/[2(f^2+g^2)]\}$,$A=f-\mathrm{i}g\equiv\sqrt{f^2+g^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$.

从式(9.40)与式(9.31)导出相应的 tomogram 为

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}(q)_{f,g}&\equiv\langle\phi(\beta)\mid q\rangle_{f,g\,g,f}\langle q\mid\phi(\beta)\rangle\\&=\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\mid_{g,f}\langle q\mid\langle\tilde{z}\mid\phi(\beta)\rangle\mid^2.\end{aligned}\tag{9.42}$$

将式(9.41)与式(9.31)代入上式,便有

$$\mathfrak{R}(q)_{f,g}=\frac{2\sinh(\beta D/2)}{C^{-2}\sqrt{\lambda+|G|^2/\lambda}}\exp\left\{2q^2\left[\frac{1-\lambda\mathrm{Re}(G^{-1})}{|A|^2(\lambda+|G|^2/\lambda)}+\mathrm{Re}\left(\frac{2E}{A^2G}\right)\right]\right\},\tag{9.43}$$

式中：$G=1+2e^{i\varphi}E$.

## 9.3 广义的两模热真空态$|\varphi(\beta)\rangle$

### 9.3.1 用 IWOP 技术导出$|\varphi(\beta)\rangle$

现在考虑量子光学非简并参量放大器用于实现参量下转换过程，其哈密顿量为[166]

$$\hat{H}_3 = \omega(a^\dagger a + b^\dagger b) + g^* a^\dagger b^\dagger + gab. \tag{9.44}$$

相应的归一化密度算符 $\rho$

$$\rho = \rho/Z(\beta) = e^{-\beta\hat{H}_3}/(\mathrm{tr}e^{-\beta\hat{H}_3}) = e^{-\beta\omega(a^\dagger a+b^\dagger b)-\beta g^* a^\dagger b^\dagger-\beta gab}/(\mathrm{tr}e^{-\beta\hat{H}_3}). \tag{9.45}$$

在文献[167]中，由于$a^\dagger a+b^\dagger b+1, a^\dagger b^\dagger, ab$也满足$SU(1,1)$李代数，可以被分解为

$$\begin{aligned}&\exp[h(a^\dagger a + b^\dagger b) + ma^\dagger b^\dagger + nab]\\&= e^{-h}\exp(Aa^\dagger b^\dagger)\exp[(a^\dagger a + b^\dagger b + 1)C]\exp(Bab)\end{aligned} \tag{9.46}$$

其中：

$$A = \frac{m}{E\coth E - h},\quad B = \frac{n}{E\coth E - h},$$

$$C = \ln\left(\frac{E}{E\cosh E - h\sinh E}\right),\quad E^2 = h^2 - mn. \tag{9.47}$$

由式(9.46)与式(9.13)，可以将式(9.45)化为

$$\begin{aligned}e^{-\beta\hat{H}_3} &= \exp[-\beta\omega(a^\dagger a + b^\dagger b) - \beta g^* a^\dagger b^\dagger - \beta gab]\\&= \varepsilon\exp(\mu^* a^\dagger b^\dagger) : \exp[(e^\kappa - 1)a^\dagger a + (e^\kappa - 1)b^\dagger b] :\cdot\\&\quad\exp(\mu ab),\end{aligned} \tag{9.48}$$

式中：

$$\kappa = \ln\left(\frac{M}{M\cosh M + \beta\omega\sinh M}\right),$$

$$\varepsilon = e^{\beta\omega}e^{\kappa}, \quad \mu = \frac{-\beta g}{M\coth M + \beta\omega},$$
$$M = \beta\sqrt{\omega^2 - |g|^2}. \tag{9.49}$$

注意到 $\exp(-a^\dagger a - b^\dagger b) := |00\rangle\langle 00|$ 以及利用式(9.13)与式(9.16),可以改写式(9.48)为

$$\begin{aligned}
e^{-\beta\hat{H}_3} &= \varepsilon\int\frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{\pi^2}\langle\tilde{z}_1\tilde{z}_2 \mid e^{\mu^* a^\dagger b^\dagger + z_1^* a^\dagger e^{\kappa/2} + z_2^* b^\dagger e^{\kappa/2}} \mid 00\tilde{0}\tilde{0}\rangle \\
&\quad \langle 00\tilde{0}\tilde{0} \mid e^{\mu ab + z_1 a e^{\kappa/2} + z_2 b e^{\kappa/2}} \mid \tilde{z}_1\tilde{z}_2\rangle \\
&= \varepsilon\int\frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{\pi^2}\langle\tilde{z}_1\tilde{z}_2 \mid e^{\mu^* a^\dagger b^\dagger + a^\dagger\tilde{a}^\dagger e^{\kappa/2} + b^\dagger\tilde{b}^\dagger e^{\kappa/2}} \mid 00\tilde{0}\tilde{0}\rangle \\
&\quad \langle 00\tilde{0}\tilde{0} \mid e^{\mu ab + \tilde{a}a e^{\kappa/2} + b\tilde{b} e^{\kappa/2}} \mid \tilde{z}_1\tilde{z}_2\rangle \\
&= \tilde{\mathrm{tr}}[\varepsilon e^{\mu^* a^\dagger b^\dagger + a^\dagger\tilde{a}^\dagger e^{\kappa/2} + b^\dagger\tilde{b}^\dagger e^{\kappa/2}} \mid 00\tilde{0}\tilde{0}\rangle\langle\tilde{0}\tilde{0}00 \mid e^{\mu ab + \tilde{a}a e^{\kappa/2} + b\tilde{b} e^{\kappa/2}}].
\end{aligned} \tag{9.50}$$

式中:$|00\tilde{0}\tilde{0}\rangle \equiv |0\tilde{0}\rangle_a |0\tilde{0}\rangle_b$,已用了双模相干态完备性 $\int\frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{\pi^2}\cdot |\tilde{z}_1\tilde{z}_2\rangle\langle\tilde{z}_1\tilde{z}_2| = 1$. 再利用 $\rho Z(\beta) = e^{-\beta\hat{H}}$ 以及式(9.11),有

$$\rho = \tilde{\mathrm{tr}}[|\varphi(\beta)\rangle\langle\varphi(\beta)|]. \tag{9.51}$$

因此,得到广义双模热真空态 $|\varphi(\beta)\rangle$(对于式(9.55)所对应的扩展空间的纯态),即[168]

$$|\varphi(\beta)\rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon}{Z(\beta)}} e^{\mu^* a^\dagger b^\dagger + a^\dagger\tilde{a}^\dagger e^{\kappa/2} + b^\dagger\tilde{b}^\dagger e^{\kappa/2}} \mid 00\tilde{0}\tilde{0}\rangle, \tag{9.52}$$

其中配分函数 $Z(\beta)$ 由式(9.48)决定:

$$\begin{aligned}
Z(\beta) &= \mathrm{tr}(e^{-\beta\hat{H}_3}) \\
&= \mathrm{tr}\{\varepsilon\exp(\mu^* a^\dagger b^\dagger) : \exp[(e^{\kappa}-1)a^\dagger a + (e^{\kappa}-1)b^\dagger b] : \cdot \\
&\quad \exp(\mu ab)\}.
\end{aligned} \tag{9.53}$$

插入 $\int\frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{\pi^2} |z_1 z_2\rangle\langle z_1 z_2| = 1$,并利用积分公式(9.14)和式(9.53),最终求出

$$Z(\beta) = \varepsilon\int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{\pi^2}\langle z_1 z_2 \mid e^{\mu^* a^\dagger b^\dagger} : e^{(e^\kappa-1)a^\dagger a+(e^\kappa-1)b^\dagger b} : e^{\mu ab} \mid z_1 z_2\rangle$$

$$= \varepsilon\int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{\pi^2}\exp[(e^\kappa - 1) \mid z_1 \mid^2 + (e^\kappa - 1) \mid z_2 \mid^2 + \mu^* z_1^* z_2^* + \mu z_1 z_2]$$

$$= \frac{\varepsilon}{(e^\kappa - 1)^2 - \mid \mu \mid^2}. \tag{9.54}$$

于是

$$\ln Z(\beta) = \beta\omega + \kappa - \ln[(K-1)^2 - \mid \mu \mid^2], \quad K = e^\kappa \tag{9.55}$$

利用配分函数 $Z(\beta)$ 与热动力学关系，系统 $\hat{H}_3$ 的内能由式(9.54)求出为

$$\langle H_3 \rangle_e = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z(\beta)$$

$$= -\omega - \frac{\partial K}{K\partial\beta} + \frac{1}{(K-1)^2 - \mid \mu \mid^2}\frac{\partial}{\partial\beta}[(K-1)^2 - \mid \mu \mid^2]$$

$$= -\omega - \frac{\partial K}{K\partial\beta} + \frac{1}{(K-1)^2 - \mid \mu \mid^2}\left[2(K-1)\frac{\partial K}{\partial\beta} - \mu\frac{\partial\mu^*}{\partial\beta} - \mu^*\frac{\partial\mu}{\partial\beta}\right] \tag{9.56}$$

由(9.49)计算得

$$\frac{\partial K}{\partial\beta} = -\frac{K^2}{\beta}(M\sinh M + \beta\omega\cosh M) \tag{9.57}$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial\beta} = -gK^2 \tag{9.58}$$

代入式(9.56)得

$$\langle H_3 \rangle_e = -\omega + \frac{K}{(K-1)^2 - \mid \mu \mid^2}\left[-\frac{1}{\beta}(M\sinh M + \beta\omega\cosh M)(K^2 + \mid \mu \mid^2 - 1) + K(g^*\mu + g\mu^*)\right] \tag{9.59}$$

其中：

$$1-K^2-|\mu|^2=\frac{2M\sinh M(M\sinh M+\beta\omega\cosh M)}{(M\cosh M+\beta\omega\sinh M)^2} \tag{9.60}$$

$$\begin{aligned}(K-1)^2-|\mu|^2 &= (K-1-|\mu|)(K-1+|\mu|)\\ &= \frac{4M\sinh^2\dfrac{M}{2}}{M\cosh M+\beta\omega\sinh M}\end{aligned} \tag{9.61}$$

把后两式代入$\langle H_3\rangle_e$中，并利用

$$(M\sinh M+\beta\omega\cosh M)^2-|g|^2\beta^2=(M\cosh M+\beta\omega\sinh M)^2 \tag{9.62}$$

最终得内能

$$\langle H_3\rangle_e=-\omega+\sqrt{\omega^2-|g|^2}\coth\frac{M}{2} \tag{9.63}$$

## 9.3.2 用$|\varphi(\beta)\rangle$导出系统的内能分布

以下用纯态式(9.52)来求内解，以代替上节用系综平均求式(9.63)的方法. 由式(9.1)以及注意到$\langle\varphi(\beta)|\varphi(\beta)\rangle=1$，可以计算出

$$\begin{aligned}\langle\omega a^\dagger a\rangle_e &= \langle\omega b^\dagger b\rangle_e\\ &= \frac{1}{2}\langle\omega(a^\dagger a+b^\dagger b)\rangle_e\\ &= \frac{\omega}{2}\langle\varphi(\beta)\mid(aa^\dagger+bb^\dagger)\mid\varphi(\beta)\rangle-\omega\\ &= \frac{\varepsilon}{Z(\beta)}\frac{\omega}{2}\langle 00\tilde{0}\tilde{0}\mid\exp(\mu ab+a\tilde{a}e^{\kappa/2}+b\tilde{b}e^{\kappa/2})\cdot\\ &\quad (aa^\dagger+bb^\dagger)\exp(\mu^* a^\dagger b^\dagger+a^\dagger\tilde{a}^\dagger e^{\kappa/2}+b^\dagger\tilde{b}^\dagger e^{\kappa/2})|00\tilde{0}\tilde{0}\rangle-\omega\end{aligned} \tag{9.64}$$

在插入4模相干态完备性后，得到

$$\omega\langle b^\dagger b\rangle_e=\frac{\varepsilon}{Z(\beta)}\int\frac{d^2z_1d^2z_2d^2z_3d^2z_4}{\pi^4}|z_2|^2\cdot$$

$$\exp\left\{-\sum_{i=1}^{4}|z_i|^2+\mu z_1 z_2+(z_1 z_1'+z_2 z_2')e^{\kappa/2}+\right.$$

$$\left.\mu^* z_1^* z_2^*+(z_1^* z_1'^*+z_2^* z_2'^*)e^{\kappa/2}\right\}-\omega$$

$$=\frac{\omega(1-e^{\kappa})}{(e^{\kappa}-1)^2-|\mu|^2}-\omega, \tag{9.65}$$

又可求出

$$\langle g^* a^\dagger b^\dagger\rangle_e = g^*\langle\varphi(\beta)\mid a^\dagger b^\dagger\mid\varphi(\beta)\rangle$$

$$=\frac{g^*\mu}{(e^{\kappa}-1)^2-|\mu|^2}, \tag{9.66}$$

$$\langle gab\rangle_e=\frac{g\mu^*}{(e^{\kappa}-1)^2-|\mu|^2}. \tag{9.67}$$

从式(9.66)与式(9.67)看出，这两项($g^* a^\dagger b^\dagger$和$gab$)贡献一样的能量. 通过式(9.65)～式(9.67)，可以验证

$$\langle\hat{H}_3\rangle_e=\langle\omega a^\dagger a\rangle_e+\langle\omega b^\dagger b\rangle_e+\langle g^* a^\dagger b\rangle_e+\langle gab\rangle_e$$

$$=\frac{2\omega(1-e^{\kappa})+g^*\mu+g\mu^*}{(e^{\kappa}-1)^2-|\mu|^2}-2\omega \tag{9.68}$$

再用式(9.49)和式(9.61)，可以验证上式即为式(9.63). 可见新的热真空态式(9.52)是正确的.

### 9.3.3 利用广义 Feynman-Hellmann 定理验证热真空态

以下从另一角度，采用广义 Feynman-Hellmann 定理(GH-FT)来计算式(9.63)的结果. 在文献[169]中，在量子统计中对于混态的系综平均意义下，系统的平均能量$\langle\hat{H}\rangle_e$有

$$\frac{\partial}{\partial\chi_i}\langle\hat{H}\rangle_e=\left\langle(1+\beta\langle\hat{H}\rangle_e-\beta\hat{H})\frac{\partial\hat{H}}{\partial\chi_i}\right\rangle_e, \tag{9.69}$$

其中：$\chi_i$ 是系统哈密顿量$\hat{H}$中的相关量.

将式(9.44)代入式(9.69)，分别取 $\chi_i$ 为 $\omega, g^*, g$，则有

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\langle \hat{H}_3\rangle_e}{\partial\omega} = \langle(1+\beta\langle \hat{H}_3\rangle_e - \beta\hat{H}_3)(a^\dagger a + b^\dagger b)\rangle_e, \\
\dfrac{\partial\langle \hat{H}_3\rangle_e}{\partial g^*} = \langle(1+\beta\langle \hat{H}_3\rangle_e - \beta\hat{H}_3)(a^\dagger b^\dagger)\rangle_e, \\
\dfrac{\partial\langle \hat{H}_3\rangle_e}{\partial g} = \langle(1+\beta\langle \hat{H}_3\rangle_e - \beta\hat{H}_3)(ab)\rangle_e.
\end{cases} \tag{9.70}
$$

假设$\hat{H}_3$的本征态$|\Psi_n\rangle$,满足

$$
\hat{H}_3 \mid \Psi_n\rangle = E_n \mid \Psi_n\rangle, \tag{9.71}
$$

由于

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{ab - a^\dagger b^\dagger}{2}, \hat{H}_3\right] \\
&\quad = \omega(a^\dagger b^\dagger + ab) + \frac{g^* + g}{2}(a^\dagger a + b^\dagger b) + \frac{g^* + g}{2},
\end{aligned} \tag{9.72}
$$

有

$$
\langle\Psi_n \mid [\omega(a^\dagger b^\dagger + ab) + (\mathrm{Re}g)(a^\dagger a + b^\dagger b) + (\mathrm{Re}g)] \mid \Psi_n\rangle = 0, \tag{9.73}
$$

因此,

$$
\begin{aligned}
&\langle(1+\beta\langle \hat{H}_3\rangle_e - \beta\hat{H}_3)[\omega(a^\dagger b^\dagger + ab) + (\mathrm{Re}g)(a^\dagger a + b^\dagger b) + \\
&(\mathrm{Re}g)]\rangle_e = 0.
\end{aligned} \tag{9.74}
$$

为了方便起见,令 $g$ 为实数,即 $g^* = g$. 联合式(9.70)与式(9.74),得到

$$
\omega\frac{\partial\langle \hat{H}_3\rangle_e}{\partial g^*} + \omega\frac{\partial\langle \hat{H}_3\rangle_e}{\partial g} + g\frac{\partial\langle \hat{H}_3\rangle_e}{\partial\omega} + g = 0. \tag{9.75}
$$

根据特征方法[160,170],有

$$
\frac{\mathrm{d}g^*}{\omega} = \frac{\mathrm{d}g}{\omega} = \frac{\mathrm{d}\omega}{g} = -\frac{\mathrm{d}\langle \hat{H}_3\rangle_e}{g}, \tag{9.76}
$$

即

$$\frac{\mathrm{d}g}{\omega}=\frac{\mathrm{d}\omega}{g},\quad \mathrm{d}\omega=-\mathrm{d}\langle \hat{H}_3\rangle_{\mathrm{e}}. \tag{9.77}$$

从上式，可以得到

$$-\omega^2+g^2=C_1,\quad \langle \hat{H}_3\rangle_{\mathrm{e}}+\omega=C_2, \tag{9.78}$$

其中：$C_1$，$C_2$ 是任意常数. 方程(9.75)的通解为

$$\langle \hat{H}_3\rangle_{\mathrm{e}}=-\omega+f[-\omega^2+g^2], \tag{9.79}$$

式中：$f[x]$是有关 $x$ 的函数表达式. 为了求出确定解，可以检查特殊情况，即当 $g\to 0$，$\hat{H}_3\to\omega a^\dagger a+\omega b^\dagger b$，$\langle \omega a^\dagger a+\omega b^\dagger b\rangle_{\mathrm{e}}=\frac{2\omega}{\mathrm{e}^{\beta\omega}-1}$，它是所熟悉的 Bose 统计分布公式，即

$$\langle \hat{H}_3\ |_{g=0}\rangle_{\mathrm{e}}=-\omega+f[-\omega^2]=\omega\coth\frac{\beta\omega}{2}-\omega, \tag{9.80}$$

所以这暗示了函数 $f[x]$的形式为 $f[x]=\sqrt{-x}\coth\left(\frac{\beta\sqrt{-x}}{2}\right)$，根据式(9.79)得到平均能

$$\langle \hat{H}_3\rangle_{\mathrm{e}}=-\omega+\Omega\coth\left(\frac{\beta\Omega}{2}\right), \tag{9.81}$$

式中：$\Omega=\sqrt{\omega^2-g^2}$，与式(9.63)的结果是一样的.

# 第 10 章　用 IWOP 技术研究四元数的积分和相干态

爱尔兰数学家和物理学家 W. R. Hamilton 于 1844 年发明了四元数[171]，这是他一生最重要的成就之一，它是非交换复数的扩展. 四元数可以用来研究量子转动，在一个单位四元数与围绕通过原点的轴的 3 维旋转之间存在着的对应关系[172-174]. 四元数 $w$ 表示一个实数与向量的总和，包含四项：一个实部和三个虚部，即

$$w = w_1 + w_2 e_i + w_3 e_j + w_4 e_k. \tag{10.1}$$

这里：$w_2, w_3, w_4$ 都是实数，$e_i, e_j, e_k$ 为三个虚单位

$$e_i^2 = e_j^2 = e_k^2 = -1. \tag{10.2}$$

四元数运算规则取决于三个虚变量的运算

$$e_i e_j = -e_j e_i = e_k, \quad e_j e_k = -e_k e_j. \tag{10.3}$$

类似于复数的共轭，一个四元数 $w$ 的共轭为

$$w^* = w_1 - w_2 e_i - w_3 e_j - w_4 e_k \tag{10.4}$$

$w$ 的模平方等于

$$|w|^2 = ww^* = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2. \tag{10.5}$$

对于任意一个 $w$，定义它的向量部分 $v$

$$v = w_2 e_i + w_3 e_j + w_4 e_k, \tag{10.6}$$

所以 $w = w_1 + v$, $w^* = w_1 - v$，以及

$$v^2 = -|v|^2, \quad |w|^2 = w_1^2 + |v|^2. \tag{10.7}$$

考虑到四元数的乘积具有不可交换性，有关四元数函数的积分也是对物理学家与数学家新的挑战. 在本章里，我们导出一些对于四元数的 Gauss 积分公式. 然后将通常的相干态 $|z\rangle$ 推广到四元数相干态 $|w\rangle$，并利用 IWOP 技术与上述积分公式证明 $|w\rangle$ 完备性与相关的算符恒等式[175].

## 10.1 一些四元数积分公式的导出

首先计算下面的积分公式

$$I_1 \equiv \int \frac{\mathrm{d}^4 w}{\pi} \exp(\rho \mid w \mid^2 + \mu w + \nu w^*), \tag{10.8}$$

其中：

$$\mathrm{d}^4 w = \mathrm{d}w_1 \mathrm{d}w_2 \mathrm{d}w_3 \mathrm{d}w_4 = \mathrm{d}w_1 \mathrm{d}^3 v \tag{10.9}$$

是体积元，$\rho, \mu, \nu$ 都是实参数. 该积分类似于复数的 Gauss 积分公式

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} \exp(\lambda \mid z \mid^2 + \mu z + \nu z^*) = -\frac{1}{\lambda} \exp(-\mu\nu/\lambda), \quad \mathrm{Re}\lambda < 0. \tag{10.10}$$

从 $w = w_1 + v$ 与 $v^2 = -|v|^2$，有

$$\exp v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^n}{n!} = \cos \mid v \mid + \frac{\sin \mid v \mid}{\mid v \mid} v, \tag{10.11}$$

以及

$$\begin{aligned} w^n &= (w_1 + v)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k w_1^{n-k} v^k \\ &= \sum_{j=0}^{[n/2]} \mathrm{C}_n^{2j} w_1^{n-2j} v^{2j} + \sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} \mathrm{C}_n^{2j+1} w_1^{n-2j-1} v^{2j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{[n/2]} \mathrm{C}_n^{2j} w_1^{n-2j} (\mathrm{i} \mid v \mid)^{2j} + \\ &\quad \sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} \mathrm{C}_n^{2j+1} w_1^{n-2j-1} (-1)^j \mid v \mid^{2j+1} \frac{v}{\mid v \mid}. \end{aligned} \tag{10.12}$$

另一方面，与

$$\begin{aligned} &(w_1 + \mathrm{i} \mid v \mid)^n \\ &= \sum_{j=0}^{[n/2]} \mathrm{C}_n^{2j} w_1^{n-2j} (\mathrm{i} \mid v \mid)^{2j} + \sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} \mathrm{C}_n^{2j+1} w_1^{n-2j-1} (\mathrm{i} \mid v \mid)^{2j+1} \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^{[n/2]} C_n^{2j} w_1^{n-2j} (\mathrm{i} \mid v \mid)^{2j} + \mathrm{i} \sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} C_n^{2j+1} w_1^{n-2j-1} (-1)^j \mid v \mid^{2j+1}, \tag{10.13}$$

可见$(w_1+\mathrm{i}|v|)^n$ 的虚部为

$$\sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} C_n^{2j+1} w_1^{n-2j-1} (-1)^j \mid v \mid^{2j+1}. \tag{10.14}$$

联合式(10.12)与式(10.13)，得到

$$w^n = \mathrm{Re}[(w_1 + \mathrm{i} \mid v \mid)^n] + \mathrm{Im}[(w_1 + \mathrm{i} \mid v \mid)^n] \frac{v}{\mid v \mid}. \tag{10.15}$$

所以，对于任一“实”函数 $f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n w^n$，式中 $\lambda_n$ 是实数，可以导出

$$\begin{aligned} f(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \left\{ \mathrm{Re}[(w_1 + \mathrm{i} \mid v \mid)^n] + \mathrm{Im}[(w_1 + \mathrm{i} \mid v \mid)^n] \frac{v}{\mid v \mid} \right\} \\ &= \mathrm{Re}[f(w_1 + \mathrm{i} \mid v \mid)] + \mathrm{Im}[f(w_1 + \mathrm{i} \mid v \mid)] \frac{v}{\mid v \mid}. \end{aligned} \tag{10.16}$$

注意到在 $v$ 的第二项是奇数，因此可以得到有关四元数指数函数的两个等式：

$$\begin{aligned} &\exp[\mu w] \\ &= \mathrm{Re}[\exp(\mu w_1 + \mathrm{i} \mid \mu v \mid)] + \mathrm{Im}[\exp(\mu w_1 + \mathrm{i} \mid \mu v \mid)] \frac{\mu v}{\mid \mu v \mid} \\ &= \exp(\mu w_1) \left[ \cos(\mid \mu v \mid) + \frac{\mu v}{\mid \mu v \mid} \sin(\mid \mu v \mid) \right] \end{aligned} \tag{10.17}$$

和

$$\begin{aligned} \exp[\nu w^*] &= (\exp[\nu w])^* \\ &= \left\{ \exp(\nu w_1) \left[ \cos(\mid \nu v \mid) + \frac{\nu v}{\mid \nu v \mid} \sin(\mid \nu v \mid) \right] \right\}^* \\ &= \exp(\nu w_1) \left[ \cos(\mid \nu v \mid) - \frac{\nu v}{\mid \nu v \mid} \sin(\mid \nu v \mid) \right]. \end{aligned} \tag{10.18}$$

由于 $w$ 与 $w^*$ 是对易的，则

$$\begin{aligned}\exp[\mu w]\exp[\nu w^*] &= \exp[\mu w + \nu w^*] \\ &= \exp[(\mu+\nu)w_1 + (\mu-\nu)v] \\ &= \exp[(\mu+\nu)w_1]\Big\{\cos[|(\mu-\nu)v|] + \\ &\quad \frac{(\mu-\nu)v}{|(\mu-\nu)v|}\sin(|(\mu-\nu)v|)\Big\}. \end{aligned} \tag{10.19}$$

于是，式(10.8)变为

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{\mathrm{d}w_1}{\pi^2}\exp[(\mu+\nu)w_1 + \rho w_1^2]\int \mathrm{d}^3 v \exp[(\mu-\nu)v + \rho|v|^2] \\ &= \sqrt{\frac{1}{-\rho}}\exp\left(-\frac{(\mu+\nu)^2}{4\rho}\right)\int \frac{\mathrm{d}^3 v}{\pi^{3/2}}\exp[(\mu-\nu)v+\rho|v|^2]. \end{aligned} \tag{10.20}$$

式中：$|v|^2 = w_2^2 + w_3^2 + w_4^2$，上式右边就是常见的正规的 Gauss 积分，计算它得到

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}^3 v}{\pi^{3/2}}\exp[(\mu-\nu)v+\rho|v|^2] &= \int_0^\infty \frac{4\pi|v|^2\mathrm{d}|v|}{\pi^{3/2}}e^{\rho|v|^2}\cos(\lambda|v|) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}r e^{\rho r^2}\cos(\lambda r) \\ &= \frac{1}{(-\rho)^{3/2}}\left(1+\frac{\lambda^2}{2\rho}\right)\exp\left(\frac{\lambda^2}{4\rho}\right). \end{aligned} \tag{10.21}$$

其中：$\lambda = \mu - \nu$.

式(10.20)的最终结果为

$$\int \frac{\mathrm{d}^4 w}{\pi^2}\exp(\rho|w|^2 + \mu w + \nu w^*) = \frac{1}{\rho^2}\left[1+\frac{(\mu-\nu)^2}{2\rho}\right]e^{-\mu\nu/\rho}. \tag{10.22}$$

如式(10.21)中补一个权重因子 $\frac{1}{2|v^2|}$，则有

$$\int \frac{\mathrm{d}^3 v}{\pi^{3/2}}\frac{1}{2|v|^2}\exp(\rho|v|^2+\lambda v) = \int_0^\infty \frac{2\pi\mathrm{d}|v|}{\pi^{3/2}}e^{\rho|v|^2}\cos(\lambda|v|)$$

$$=\frac{1}{(-\rho)^{1/2}}\exp\left(\frac{\lambda^2}{4\rho}\right), \tag{10.23}$$

故得到另一个积分公式

$$I_2 \equiv \int \frac{\mathrm{d}^4 w}{\pi^2}\,\frac{1}{2\mid v\mid^2}\exp(\rho\mid w\mid^2+\mu w+\nu w^*)=\frac{-1}{\rho}\mathrm{e}^{-\mu\nu/\rho}, \tag{10.24}$$

这与式(10.10)是相似的.

现在考虑二个更普遍的情况

$$I_3 \equiv \int \frac{\mathrm{d}^4 w}{\pi^2}\exp(\rho\mid w\mid^2+fw^2+gw^{*2}+\mu w+\nu w^*), \tag{10.25}$$

$$I_4 \equiv \int \frac{\mathrm{d}^4 w}{\pi^2}\,\frac{1}{2\mid v\mid^2}\exp(\rho\mid w\mid^2+fw^2+gw^{*2}+\mu w+\nu w^*) \tag{10.26}$$

式中:$\rho, f, g, \mu, \nu$ 都是实参数. 由于

$$w^2=(w_1+v)^2=w_1^2+2w_1v-\mid v\mid^2, \tag{10.27}$$

$$w^{*2}=(w_1-v)^2=w_1^2-2w_1v-\mid v\mid^2, \tag{10.28}$$

有

$$\begin{aligned}&\exp(\rho\mid w\mid^2+fw^2+gw^{*2}+\mu w+\nu w^*)\\&\quad=\exp[(\rho+f+g)w_1^2+(\mu+\nu)w_1+(\rho-f-g)\mid v\mid^2+\\&\qquad v(2fw_1-2gw_1+\mu-\nu)],\end{aligned} \tag{10.29}$$

再利用式(10.23),对 $v$ 积分有

$$\begin{aligned}&\int\frac{\mathrm{d}^3 v}{\pi^{3/2}}\exp(\rho\mid w\mid^2+fw^2+gw^{*2}+\mu w+\nu w^*)\\&\quad=\exp[(\rho+f+g)w_1^2+(\mu+\nu)w_1]\cdot\\&\qquad\int\frac{\mathrm{d}^3 v}{\pi^{3/2}}\exp[(\rho-f-g)\mid v\mid^2+(2fw_1-2gw_1+\mu-\nu)v]\\&\quad=\frac{1}{(f+g-\rho)^{3/2}}\left(1+\frac{(2fw_1-2gw_1+\mu-\nu)^2}{2(\rho-f-g)}\right)\cdot\\&\qquad\exp\left[\frac{(2fw_1-2gw_1+\mu-\nu)^2}{4(\rho-f-g)}+(\rho+f+g)w_1^2+(\mu+\nu)w_1\right].\end{aligned} \tag{10.30}$$

然后对 $w_1$ 积分，其结果为

$$I_3=\frac{1}{(f+g-\rho)^{3/2}}\int\frac{\mathrm{d}w_1}{\pi^{1/2}}\left(1+\frac{(2fw_1-2gw_1+\mu-\nu)^2}{2(\rho-f-g)}\right)\cdot$$

$$\exp\left[(\rho+f+g)w_1^2+(\mu+\nu)w_1+\frac{(2fw_1-2gw_1+\mu-\nu)^2}{4(\rho-f-g)}\right]$$

$$=(\rho^2-4fg)^{-5/2}\exp\left(\frac{g\mu^2-\rho\mu\nu+f\nu^2}{\rho^2-4fg}\right)\cdot$$

$$\left\{-(\rho+f+g)(\rho^2-4fg)-\frac{1}{2}[(\rho+2g)\mu-(\rho+2f)\nu]^2\right\}. \tag{10.31}$$

同样的方法，对于积分 $I_4$，有

$$\int\frac{\mathrm{d}^3v}{2\mid v\mid^2\pi^{3/2}}\exp\{\rho\mid w\mid^2+fw^2+gw^{*2}+\mu w+\nu w^*\}$$

$$=\exp[(\rho+f+g)w_1^2+(\mu+\nu)w_1]\cdot$$

$$\int\frac{\mathrm{d}^3v}{2\mid v\mid^2\pi^{3/2}}\exp[(\rho-f-g)\mid v\mid^2+$$

$$(2fw_1-2gw_1+\mu-\nu)v]$$

$$=\frac{1}{(f+g-\rho)^{1/2}}\exp\left[(\rho+f+g)w_1^2+(\mu+\nu)w_1+\right.$$

$$\left.\frac{(2fw_1-2gw_1+\mu-\nu)^2}{4(\rho-f-g)}\right], \tag{10.32}$$

再对 $w_1$ 积分，有

$$I_4=\frac{1}{(f+g-\rho)^{1/2}}\int\frac{\mathrm{d}w_1}{\pi^{1/2}}\exp\left[(\rho+f+g)w_1^2+(\mu+\nu)w_1+\right.$$

$$\left.\frac{(2fw_1-2gw_1+\mu-\nu)^2}{4(\rho-f-g)}\right]$$

$$=\sqrt{\frac{1}{\rho^2-4fg}}\exp\left(\frac{g\mu^2-\rho\mu\nu+f\nu^2}{\rho^2-4fg}\right). \tag{10.33}$$

以上积分为研究四元数相干态提供了方便.

## 10.2 从相干态$|z\rangle$扩展到四元数相干态$|w\rangle$

相干态$|z\rangle$定义在复数$z$空间中的形式为

$$|z\rangle = \exp\left[za^{\dagger} - \frac{1}{2}|z|^2\right]|0\rangle, \qquad (10.34)$$

$|0\rangle$是 Fock 真空态，$a|0\rangle=0,[a,a^{\dagger}]=1$. 根据 IWOP 技术以及$|0\rangle\langle 0| = :\exp(-a^{\dagger}a):$很容易证明它具有超完备性

$$\int \frac{d^2 z}{\pi}|z\rangle\langle z| = \int \frac{d^2 z}{\pi}:\exp[-|z|^2 + za^{\dagger} + z^* a - a^{\dagger}a]:=1, \qquad (10.35)$$

在此基础上，定义四元数相干态

$$|w\rangle = C\exp[wa^{\dagger}]|0\rangle, \qquad (10.36)$$

式中：$C$是归一化实常数，且满足

$$a|w\rangle = w|w\rangle, \quad \langle w|a^{\dagger} = \langle w|w^*, \qquad (10.37)$$

也有

$$\langle w|a^{\dagger}a|w\rangle = |w|^2. \qquad (10.38)$$

根据

$$\langle w|w\rangle = C^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^{*n}w^n}{n!} = C^2\exp[-|w|^2], \qquad (10.39)$$

取$C=\exp\left[-\frac{1}{2}|w|^2\right]$，即

$$|w\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}|w|^2 + wa^{\dagger}\right]|0\rangle. \qquad (10.40)$$

$|w\rangle$与粒子数$|n\rangle$的内积为

$$\langle n|w\rangle = e^{-\frac{1}{2}|w|^2}\langle n|\sum_{n}\frac{(wa^{\dagger})^n}{n!}|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|w|^2}\frac{w^n}{\sqrt{n!}}, \qquad (10.41)$$

即

$$|\langle n|w\rangle|^2 = e^{-|w|^2}\frac{|w|^{2n}}{n!}, \qquad (10.42)$$

这就是四元数的 Poisson 分布.

下面,讨论一下四元数相干态 $|w\rangle$ 的完备性. 先研究对 $|w\rangle\langle w|$ 积分. 利用 IWOP 技术以及 $w$ 与 $w^*$ 可交换的性质和式(10.31)的积分公式,有

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}^4 w}{\pi^2} |w\rangle\langle w| \\
&\quad = \int \frac{\mathrm{d}w_1 \mathrm{d}^2 v}{\pi^2} :\exp(-|w|^2 + wa^\dagger + w^* a - a^\dagger a): \\
&\quad =: 1 - \frac{(a^\dagger - a)^2}{2} : \neq 1.
\end{aligned} \tag{10.43}
$$

另一方面,用积分公式式(10.33),可得到

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}^4 w}{\pi^2} \frac{1}{2|v|^2} |w\rangle\langle w| \\
&\quad = \int \frac{\mathrm{d}w_1 \mathrm{d}^3 v}{2|v|^2 \pi^2} :\exp(-|w|^2 + wa^\dagger + w^* a - a^\dagger a): \\
&\quad = 1.
\end{aligned} \tag{10.44}
$$

这里看出权重因子$\frac{1}{2|v|^2}$对于完备性似乎非常有必要.

## 10.3 四元数相干态完备性的应用

根据式(10.37)和利用完备关系式(10.44)以及积分公式(10.24),可以直接得到下面的算符等式:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\lambda a} \mathrm{e}^{\mu a^\dagger} &= \int \frac{\mathrm{d}^4 w}{\pi^2} \frac{1}{2|v|^2} \mathrm{e}^{\lambda a} |w\rangle\langle w| \mathrm{e}^{\mu a^\dagger} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^4 w}{\pi^2} \frac{1}{2|v|^2} :\exp[-|w|^2 + w(a^\dagger + \lambda) + \\
&\quad w^*(a + \mu) - a^\dagger a]: \\
&=: \exp[\lambda a + \mu a^\dagger + \lambda\mu]:.
\end{aligned} \tag{10.45}
$$

再利用式(10.44)与式(10.33),有

$$e^{\lambda a^2}e^{\mu a^{\dagger 2}}=\int\frac{d^4w}{\pi^2}\frac{1}{2|v|^2}e^{\lambda a^2}\ |w\rangle\langle w|\ e^{\mu a^{\dagger 2}}$$

$$=\int\frac{d^4w}{\pi^2}\frac{1}{2|v|^2}:\exp[-|w|^2+wa^\dagger+w^*a-a^\dagger a+$$

$$\lambda w^2+\mu w^{*2}]:$$

$$=\sqrt{\frac{1}{1-4\lambda\mu}}:\exp\left(\frac{\lambda a^2+4\lambda\mu a^\dagger a+\mu a^{\dagger 2}}{1-4\lambda\mu}\right):. \quad (10.46)$$

根据 Baker-Hausdorff 公式，若两算符$\hat{X}$，$\hat{Y}$满足$[\hat{X},\hat{Y}]=s\hat{Y}$，则

$$e^{\hat{X}}e^{\hat{Y}}e^{-\hat{X}}=e^{e^s\hat{Y}}, \quad (10.47)$$

因此

$$e^{\mu a^\dagger a}=\int\frac{d^4w}{\pi^2}\frac{1}{2|v|^2}e^{\mu a^\dagger a}\ |w\rangle\langle w|$$

$$=\int\frac{d^4w}{\pi^2}\frac{1}{2|v|^2}e^{\mu a^\dagger a}\exp\left(-\frac{1}{2}|w|^2+wa^\dagger\right)e^{-\mu a^\dagger a}e^{\mu a^\dagger a}\ |0\rangle\langle w|$$

$$=\int\frac{d^4w}{\pi^2}\frac{1}{2|v|^2}\exp\left(-\frac{1}{2}|w|^2+we^\mu a^\dagger\right)|0\rangle\langle w|$$

$$=\int\frac{d^4w}{\pi^2}\frac{1}{2|v|^2}:\exp(-|w|^2+we^\mu a^\dagger+w^*a-a^\dagger a):$$

$$=:\exp[(e^\mu-1)a^\dagger a]:. \quad (10.48)$$

最后，利用式(10.24)与

$$\int\frac{d^4w}{\pi^2}\frac{1}{2|v|^2}w^nw^{*m}\exp\{\rho|w|^2+\mu w+\nu w^*\}$$

$$=\int\frac{d^4w}{\pi^2}\frac{1}{2|v|^2}\frac{\partial^{m+n}}{\partial\mu^n\partial\nu^m}\exp\{\rho|w|^2+\mu w+\nu w^*\}$$

$$=\frac{\partial^{m+n}}{\partial\mu^n\partial\nu^m}\left(\frac{-1}{\rho}e^{-\mu\nu/\rho}\right)$$

$$=e^{-\mu\nu/\rho}\sum_l^{\min[m,n]}\frac{m!n!\mu^{m-l}\nu^{n-l}}{l!(m-l)!(n-l)!(-\rho)^{m+n-l+1}}, \quad (10.49)$$

就能导出

$$a^na^{\dagger m}=\int\frac{d^4w}{\pi^2}\frac{1}{2|v|^2}w^n\ |w\rangle\langle w|w^{*m}$$

$$=\int \frac{d^4 w}{\pi^2} \frac{1}{2|v|^2} w^n w^{*m} : \exp(-|w|^2 + wa^\dagger + w^* a - a^\dagger a) :$$

$$= \sum_{l}^{\min[m,n]} \frac{m!n!a^{\dagger m-l} a^{n-l}}{l!(m-l)!(n-l)!}. \tag{10.50}$$

总结以上讨论,我们首次导出了若干有关四元数的高斯积分,引入了四元数的相干态,考察了其新的完备性关系,而四元数相干态的物理应用有待进一步发掘.

# 第 11 章　指数算符的矩阵 *LDU* 分解法

在量子力学中，大多数算符之间是不对易的，当 $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$ 两个算符间不对易时，则 $e^{\hat{A}+\hat{B}} \neq e^{\hat{A}} e^{\hat{B}}$. 例如由于 $[a, a^\dagger]=1$，$e^{\lambda(a^2-a^{\dagger 2})}$ 的分解就是一个问题. 利用矩阵的 ***LDU*** 分解[176~178]与表象可以部分地解决若干指数算符的分解问题[179,180]. Dirac 曾说，对于相空间中坐标与动量的经典正则变换，总是存在一个量子力学幺正算符与之对应，而有序算符内的积分技术则可以建立联系这两种变换的"桥梁". 例如，经典的坐标变换 $q_1 \to q_2/\mu$，则把此变换置于坐标表象的态矢中，就对应于幺正的单模压缩变换算符（其中 $\mu = e^\lambda$）为

$$\mu^{-1/2}\int dq_1\, |q_1/\mu\rangle\langle q_1|$$

$$= \exp\left(-\frac{a_1^{\dagger 2}}{2}\tanh\lambda\right)\exp\left[\ln \mathrm{sech}\lambda\left(a_1^\dagger a_1+\frac{1}{2}\right)\right]\exp\left(\frac{a_1^2}{2}\tanh\lambda\right)$$

其中：$|q_1\rangle$ 是坐标算符 $\hat{Q}_1$ 的本征态，即 $\hat{Q}_1|q_1\rangle = q_1|q_1\rangle$，而 $\hat{Q}_1 = (a_1+a_1^\dagger)/\sqrt{2}$. 本章，可以见到这种思想的更多实际应用[181]，即把矩阵变换置于表象内. 相应的指数算符的分解就依靠该矩阵的 *LDU* 分解来完成.

## 11.1　对应于 2×2 变换矩阵的指数算符分解

以 2×2 的实矩阵为例，利用坐标表象做以下经典-量子对应[182]：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\sqrt{\det(AD-CB)}\int \mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2 \left| \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right| \equiv \hat{K}, \tag{11.1}$$

这里 $A,B,C,D$ 都是实参数，$\sqrt{\det(AD-CB)}$ 保证了 $\hat{K}$ 的幺正性，$\left|\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}\right\rangle \equiv |q_1\rangle|q_2\rangle$. 在 Fock 空间，$|q_i\rangle$ 可表示为

$$|q_i\rangle = \pi^{-1/4}\exp\left(-\frac{q_i^2}{2}+\sqrt{2}q_i a_i^\dagger - \frac{a_i^{\dagger 2}}{2}\right)|0\rangle_i \quad i=1,2, \tag{11.2}$$

利用 IWOP 积分技术，对式(11.1)积分就可以得到对应于经典变换 $q_1\rightarrow Aq_1+Bq_2, q_2\rightarrow Cq_1+Dq_2$ 的幺正算符 $\hat{K}$ 的具体形式. 另一方面，利用矩阵的 ***LDU*** 分解理论(***L*** 是指下三角矩阵，***D*** 指对角矩阵，***U*** 指上三角矩阵)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{C}{A} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \frac{AD-CB}{A} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{B}{A} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11.3}$$

以及坐标表象本征矢的性质：$\delta(q_i-q_i')=\langle q_i'|q_i\rangle$，$\langle q_i|\hat{P}_i = -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial q_i}\langle q_i|$，可得 $\hat{K}$ 的分解公式

$$\hat{K}\equiv \hat{L}_2\hat{D}_2\hat{U}_2, \tag{11.4}$$

其中：$\hat{L}_2,\hat{D}_2,\hat{U}_2$ 的形式分别为

$$\hat{L}_2 = \int \mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2 \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{C}{A} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right| = \exp\left(-\mathrm{i}\frac{C}{A}\hat{Q}_1\hat{P}_2\right), \tag{11.5}$$

$$\hat{D}_2 = \sqrt{\det(AD-CB)}\int \mathrm{d}q_1\,\mathrm{d}q_2 \left| \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \dfrac{AD-CB}{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \exp\left[ -\mathrm{i}(\hat{Q}_1\hat{P}_1 + \hat{P}_1\hat{Q}_1)\ln\sqrt{A} - \mathrm{i}(\hat{Q}_2\hat{P}_2 + \hat{P}_2\hat{Q}_2) \cdot \ln\sqrt{\frac{AD-CB}{A}} \right], \tag{11.6}$$

$$\hat{U}_2 = \int \mathrm{d}q_1\,\mathrm{d}q_2 \left| \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{B}{A} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right| = \exp\left( -\mathrm{i}\,\frac{B}{A}\hat{Q}_2\hat{P}_1 \right), \tag{11.7}$$

这里 $\hat{P}_j = \dfrac{a_j - a_j^\dagger}{\mathrm{i}\sqrt{2}}$. 实际上 $\hat{D}_2$ 就是一个压缩算符.

因些,可以看出,矩阵理论的 ***LDU*** 分解对于找到新的算符公式是非常有帮助的. 当然,还有另一种分解方法

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{B}{D} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{AD-BC}{D} & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{C}{D} & 1 \end{bmatrix}, \tag{11.8}$$

这将会给出另一种分解形式,读者可以自己做一下.

## 11.2 对应于 3×3 变换矩阵的指数算符分解

构造如下形式的积分算符($v_{ij}$ 是实数,$\sqrt{\det \boldsymbol{v}}$ 保证了 $\hat{V}$ 的幺正性):

$$\hat{V} \equiv \sqrt{\det \boldsymbol{v}} \int \mathrm{d}^3\vec{q} \left| \boldsymbol{v} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \right|, \quad \boldsymbol{v} \equiv \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix}, \tag{11.9}$$

式中:$\mathrm{d}^3\vec{q} \equiv \mathrm{d}q_1\,\mathrm{d}q_2\,\mathrm{d}q_3$. 根据 3×3 矩阵的 ***LDU*** 分解理论,有

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \boldsymbol{L}_3 \boldsymbol{D}_3 \boldsymbol{U}_3 , \tag{11.10}$$

以及

$$\det \boldsymbol{v} = l_{32} d_{11} d_{22} d_{33} u_{12} , \tag{11.11}$$

式中:$LDU$ 矩阵元与 $v_{ij}$ 之间的关系为

$$\begin{aligned} d_{11} &= v_{11} , \\ d_{12} &= \frac{v_{22} v_{11} - v_{21} v_{12}}{v_{11}} , \\ d_{33} &= \frac{v_{33} v_{11} - v_{13} v_{31}}{v_{11}} - \frac{v_{23} v_{11} - v_{13} v_{21}}{v_{11}} \frac{v_{32} v_{11} - v_{31} v_{12}}{v_{11} v_{22} - v_{12} v_{21}} , \end{aligned} \tag{11.12}$$

$$\begin{aligned} l_{21} &= \frac{v_{21}}{v_{11}} , \\ l_{31} &= \frac{v_{31}}{v_{11}} , \\ l_{32} &= \frac{v_{32} v_{11} - v_{31} v_{12}}{v_{11} v_{22} - v_{12} v_{21}} , \end{aligned} \tag{11.13}$$

$$\begin{aligned} u_{12} &= \frac{v_{12}}{v_{11}} , \\ u_{13} &= \frac{v_{13}}{v_{11}} , \\ u_{23} &= \frac{v_{23} v_{11} - v_{13} v_{12}}{v_{11} v_{22} - v_{12} v_{21}} . \end{aligned} \tag{11.14}$$

由正交性$\langle \vec{q} | \vec{q}' \rangle = \delta(\vec{q} - \vec{q}')$,可得

$$\hat{V} \equiv \hat{L}_3 \hat{D}_3 \hat{U}_3 \tag{11.15}$$

式中:

$$\hat{L}_3 = \sqrt{l_{32}} \int \mathrm{d}^3 \vec{q} \left| \boldsymbol{L}_3 \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \right| , \tag{11.16}$$

$$\hat{D}_3 = \sqrt{\det \boldsymbol{D}_3} \int \mathrm{d}^3 \vec{q} \left| \boldsymbol{D}_3 \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \right|, \tag{11.17}$$

$$\hat{U}_3 = \sqrt{u_{12}} \int \mathrm{d}^3 \vec{q} \left| \boldsymbol{U}_3 \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \right|, \tag{11.18}$$

将 $\boldsymbol{L}_3$ 和 $\boldsymbol{U}_3$ 分别分解为

$$\boldsymbol{L}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \equiv \boldsymbol{fh}, \tag{11.19}$$

$$\boldsymbol{U}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \boldsymbol{ys}. \tag{11.20}$$

可以看到相应的量子算符为

$$\hat{L}_3 \equiv \hat{F}\hat{H}, \quad \hat{U}_3 \equiv \hat{Y}\hat{S}, \tag{11.21}$$

这里的 $\hat{F}, \hat{H}, \hat{Y}$ 和 $\hat{S}$ 分别为

$$\hat{F} = \int \mathrm{d}^3 \vec{q} \left| \boldsymbol{f} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \right|, \quad \hat{H} = \sqrt{l_{32}} \int \mathrm{d}^3 \vec{q} \left| \boldsymbol{h} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \right|, \tag{11.22}$$

$$\hat{Y} = \int \mathrm{d}^3 \vec{q} \left| \boldsymbol{y} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \right|, \quad \hat{S} = \sqrt{u_{12}} \int \mathrm{d}^3 \vec{q} \left| \boldsymbol{s} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \right|, \tag{11.23}$$

综合方程式(11.9)～(11.23)，给出

$$\hat{V} \equiv \hat{F}\hat{H}\hat{D}_3\hat{Y}\hat{S}. \tag{11.24}$$

为了得到 $\hat{F},\hat{H},\hat{D},\hat{Y}$ 和 $\hat{S}$ 的明显表达式，利用关系

$$\langle\vec{q}\mid \det\boldsymbol{G}\int d^3\vec{q}'\mid \boldsymbol{G}\vec{q}'\rangle\langle\vec{q}'\mid\varphi\rangle=\int d^3\vec{q}'\delta(\vec{q}'-\boldsymbol{G}^{-1}\vec{q})\varphi(\vec{q}')$$
$$=\varphi(\boldsymbol{G}^{-1}\vec{q}),\qquad(11.25)$$

式中：$\boldsymbol{G}$ 是一个实矩阵，并且注意到

$$\boldsymbol{f}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-l_{21}&1&0\\-l_{31}&0&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{h}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-l_{32}&1\end{pmatrix},\qquad(11.26)$$

就得到

$$\left\langle\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}\middle|\int d^3\vec{q}'\middle|\boldsymbol{f}\begin{pmatrix}q_1'\\q_2'\\q_3'\end{pmatrix}\right\rangle\left\langle\begin{pmatrix}q_1'\\q_2'\\q_3'\end{pmatrix}\middle|\varphi\right\rangle$$
$$=\varphi\left[\boldsymbol{f}^{-1}\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}\right]=\varphi(q_1,q_2-l_{21}q_1,q_3-l_{31}q_1)$$
$$=e^{-\left(l_{21}q_1\frac{\partial}{\partial q_2}+l_{31}q_1\frac{\partial}{\partial q_3}\right)}\varphi(q_1,q_2,q_3),\qquad(11.27)$$

所以

$$\hat{F}\equiv\exp[-i(l_{21}\hat{Q}_1\hat{P}_2+l_{31}\hat{Q}_1\hat{P}_3)].\qquad(11.28)$$

同样地，由

$$\left\langle\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}\middle|\sqrt{l_{32}}\int d^3\vec{q}'\middle|\boldsymbol{h}\begin{pmatrix}q_1'\\q_2'\\q_3'\end{pmatrix}\right\rangle\left\langle\begin{pmatrix}q_1'\\q_2'\\q_3'\end{pmatrix}\middle|\varphi\right\rangle$$
$$=\varphi\left[\boldsymbol{h}^{-1}\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}\right]=\varphi(q_1,q_2,q_3-l_{32}q_2)=e^{-l_{32}q_2\frac{\partial}{\partial q_3}}\varphi(q_1,q_2,q_3),$$
$$(11.29)$$

可推出

$$\hat{H} \equiv \exp(-\mathrm{i}l_{32}\hat{Q}_2\hat{P}_3). \tag{11.30}$$

另一方面，由

$$\boldsymbol{y}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -u_{13} \\ 0 & 1 & -u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{s}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -u_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{11.31}$$

和

$$\left\langle \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \middle| \int \mathrm{d}^3\vec{q}' \middle| \boldsymbol{y} \begin{pmatrix} q_1' \\ q_2' \\ q_3' \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} q_1' \\ q_2' \\ q_3' \end{pmatrix} \middle| \varphi \right\rangle$$

$$= \varphi\left[\boldsymbol{y}^{-1}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{e}^{-\left(u_{13}q_3\frac{\partial}{\partial q_1} + u_{23}q_3\frac{\partial}{\partial q_2}\right)}\varphi(q_1, q_2, q_3), \tag{11.32}$$

可以得到

$$\hat{Y} \equiv \exp[-\mathrm{i}(u_{13}\hat{Q}_3\hat{P}_1 + u_{23}\hat{Q}_3\hat{P}_2)]. \tag{11.33}$$

同理，从

$$\left\langle \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \middle| \sqrt{u_{12}}\int \mathrm{d}^3\vec{q}' \middle| \boldsymbol{s} \begin{pmatrix} q_1' \\ q_2' \\ q_3' \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} q_1' \\ q_2' \\ q_3' \end{pmatrix} \middle| \varphi \right\rangle$$

$$= \varphi\left[\boldsymbol{s}^{-1}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{e}^{-u_{12}q_2\frac{\partial}{\partial q_1}}\varphi(q_1, q_2, q_3), \tag{11.34}$$

得到

$$\hat{S} \equiv \exp(-\mathrm{i}u_{12}\hat{Q}_2\hat{P}_1). \tag{11.35}$$

现在来看算符 $\hat{D}_3$ 的形式，它是一个压缩算符

$$\hat{D}_3 = \exp\left[-\mathrm{i}\sum_{i=1}^{3}(\hat{Q}_i\hat{P}_i + \hat{P}_i\hat{Q}_i)\ln\sqrt{d_{ii}}\right]. \tag{11.36}$$

综合式(11.28)，式(11.30)，式(11.32)，式(11.35)以及式

(11.36)，得到 $\hat{V}$ 的分解式

$$
\begin{aligned}
\hat{V} &= \hat{F}\hat{H}\hat{D}_3\hat{Y}\hat{S} \\
&= \exp[-\mathrm{i}\hat{Q}_1(l_{21}\hat{P}_2 + l_{31}\hat{P}_3)]\exp(-\mathrm{i}l_{32}\hat{Q}_2\hat{P}_3)\cdot \\
&\quad \exp\left[-\mathrm{i}\sum_{i=1}^{3}(\hat{Q}_i\hat{P}_i + \hat{P}_i\hat{Q}_i)\ln\sqrt{d_{ii}}\right]\cdot \\
&\quad \exp[-\mathrm{i}\hat{Q}_3(u_{13}\hat{P}_1 + u_{23}P_2)]\exp(-\mathrm{i}u_{12}\hat{Q}_2\hat{P}_1).
\end{aligned}
\tag{11.37}
$$

## 11.3 对应于 $n\times n$ 变换矩阵的指数算符分解

在矩阵理论中，$n\times n$ 的方阵 $\boldsymbol{A}$ 可以被分解为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{LDU}$ 的充分必要条件是它的极小主子式序列

$$
\Delta_k \neq 0,(k = 1,2,\cdots,n), \tag{11.38}
$$

和

$$
\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n), \quad d_k = \Delta_k/\Delta_{k-1} \tag{11.39}
$$

在这种情况下，对于 $n\times n$ 的方阵 $\boldsymbol{A}$

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{11.40}
$$

分解矩阵 $\boldsymbol{L},\boldsymbol{D},\boldsymbol{U}$ 具体形式如下：下三角矩阵 $\boldsymbol{L}$ 为

$$
\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ L_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \tag{11.41}
$$

式中：$L_{il}$ 的表示为

$$L_{il} = \frac{\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{l-11} & A_{l-12} & \cdots & A_{l-1l} \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{il} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{l-11} & A_{l-12} & \cdots & A_{l-1l} \\ A_{l1} & A_{l2} & \cdots & A_{ll} \end{vmatrix}}, \quad i = l, l+1, \cdots, n; \tag{11.42}$$

注意分子与分母的区别是($A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{il}$)被代替为($A_{l1}, A_{l2}, \cdots, A_{ll}$). 对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 也可表达为

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_{nn} \end{bmatrix}, \tag{11.43}$$

式中:

$$D_{ii} = A_{ii}^{(i-1)} \quad i = 1, 2, \cdots, n \quad (A_{11}^{(0)} = A_{11}).$$

下三角矩阵 $\boldsymbol{U}$ 为

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & \cdots & U_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & U_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \tag{11.44}$$

式中:

$$U_{ij} = \begin{cases} \dfrac{A_{ij}^{(i-1)}}{A_{ii}^{(i-1)}} & i < j, \\ 1, & i = j, \\ 0, & i > j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \cdots, n, \tag{11.45}$$

这里 $A_{ij}^{(k)}$ 的定义是

$$A_{ij}^{(k)}=\frac{\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} & A_{1j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{kk} & A_{kj} \\ A_{i1} & \cdots & A_{ik} & A_{ij} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} & A_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{k-1,1} & \cdots & A_{k-1,k-1} & A_{k-1,k} \\ A_{k1} & \cdots & A_{k\,k-1} & A_{kk} \end{vmatrix}},$$

$$k=1,2,\cdots,n-1;\quad i,j=k+1,k+2,\cdots,n. \tag{11.46}$$

例如

$$A_{ij}^{(1)}=\frac{\begin{vmatrix} A_{11} & A_{1j} \\ A_{i1} & A_{ij} \end{vmatrix}}{A_{11}},\quad i,j=2,3,\cdots,n$$

下面讨论对应于 $n\times n$ 变换矩阵的指数算符分解. 构造如下 ket-bra 积分形式:

$$\hat{A}\equiv\sqrt{\det\boldsymbol{A}}\int \mathrm{d}^n\vec{q}\left|\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}\right\rangle\left\langle\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}\right|, \tag{11.47}$$

其中: $\sqrt{\det\mathbf{A}}$ 也是为了确保 $\hat{A}$ 的幺正性,以及

$$\left|\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}\right\rangle=\pi^{-n/4}\exp\left\{-\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{q}+\sqrt{2}\tilde{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{a}^{\dagger}-\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{a}}^{\dagger}\boldsymbol{a}^{\dagger}\right\}|\mathbf{0}\rangle, \tag{11.48}$$

表示为 $n$ 模的坐标本征态,其中: $|\mathbf{0}\rangle$ 是 $n$ 模真空态, $\boldsymbol{a}^{\dagger}=(a_1^{\dagger},a_2^{\dagger},\cdots,a_n^{\dagger})$.

根据坐标本征态正交性$\langle\vec{q}'|\vec{q}\rangle=\delta(\vec{q}'-\vec{q})$，就有

$$\hat{A}=\hat{L}\hat{D}\hat{U}, \tag{11.49}$$

这里

$$\hat{L}\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^n\vec{q}\left|\boldsymbol{L}\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_n\end{pmatrix}\right\rangle\left\langle\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_n\end{pmatrix}\right|, \tag{11.50}$$

$$\hat{D}\equiv\sqrt{\det\boldsymbol{D}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^n\vec{q}\left|\boldsymbol{D}\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_n\end{pmatrix}\right\rangle\left\langle\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_n\end{pmatrix}\right|, \tag{11.51}$$

$$\hat{U}\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^n\vec{q}\left|\boldsymbol{U}\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_n\end{pmatrix}\right\rangle\left\langle\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_n\end{pmatrix}\right|, \tag{11.52}$$

实际上

$$\hat{D}=\exp\left(-\mathrm{i}\sum_{i=1}^{n}(\hat{Q}_i\hat{P}_i+\hat{P}_i\hat{Q}_i)\ln\sqrt{D_{ii}}\right), \tag{11.53}$$

是一个 $n$ 模压缩算符. 为了求出 $\boldsymbol{L},\boldsymbol{U}$ 的具体形式，根据矩阵乘积，可以进一步将矩阵 $\boldsymbol{L},\boldsymbol{U}$ 分别分解为

$$\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\L_{21}&1&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\L_{n1}&0&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&L_{n2}&\cdots&1\end{pmatrix}\cdots$$

$$\begin{pmatrix}1&\cdots&0&0\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&1&0\\0&\cdots&L_{m-1}&1\end{pmatrix}\equiv\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_2\cdots\boldsymbol{L}_{n-1}, \tag{11.54}$$

$$
\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & U_{n-1n}\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & U_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}1 & U_{12} & \cdots & U_{1n}\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}\equiv\boldsymbol{U}_{n-1}\cdots\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{U}_1. \tag{11.55}
$$

由式(11.54)和式(11.55),有

$$
\hat{L}\equiv\hat{L}_1\hat{L}_2\cdots\hat{L}_{n-1},\quad \hat{U}\equiv\hat{U}_{n-1}\cdots\hat{U}_2\hat{U}_1, \tag{11.56}
$$

其中:

$$
\hat{L}_i\equiv\int \mathrm{d}^n\vec{q}\left|\boldsymbol{L}_i\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\\ \vdots\\ q_n\end{pmatrix}\right\rangle\left\langle\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\\ \vdots\\ q_n\end{pmatrix}\right|,\quad i=2,3,\cdots,n; \tag{11.57}
$$

和

$$
\hat{U}_i\equiv\int \mathrm{d}^n\vec{q}\left|\boldsymbol{U}_i\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\\ \vdots\\ q_n\end{pmatrix}\right\rangle\left\langle\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\\ \vdots\\ q_n\end{pmatrix}\right|,\quad i=2,3,\cdots,n. \tag{11.58}
$$

因此,将式(11.56)代入式(11.49),得到

$$
\hat{A}=\hat{L}_1\hat{L}_2\cdots\hat{L}_{n-1}\hat{D}\hat{U}_{n-1}\cdots\hat{U}_2\hat{U}_1 \tag{11.59}
$$

再利用式(11.25)的关系,就有

$$
\left\langle\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\\ \vdots\\ q_n\end{pmatrix}\right|\int \mathrm{d}^n\vec{q}\,'\left|\boldsymbol{L}_i\begin{pmatrix}q_1'\\ q_2'\\ \vdots\\ q_n'\end{pmatrix}\right\rangle\left\langle\begin{pmatrix}q_1'\\ q_2'\\ \vdots\\ q_n'\end{pmatrix}\right|\varphi\rangle
$$

$$= \varphi[(q_1, q_2, \cdots, q_i, q_{i+1} - L_{i+1i}q_i, \cdots, q_n - L_{ni}q_i)]$$

$$= \exp\left(-q_i \sum_{k=i+1}^{n} L_{ki} \frac{\partial}{\partial q_k}\right)\varphi(q_1, q_2, \cdots, q_n), \tag{11.60}$$

即

$$\hat{L}_i \equiv \exp(-\mathrm{i}\sum_{k=i+1}^{n} L_{ki}\hat{Q}_i\hat{P}_i), \quad i = 1,2,\cdots,n-1. \tag{11.61}$$

同样的方法，有

$$\hat{U}_i \equiv \exp(-\mathrm{i}\sum_{k=i+1}^{n} U_{ik}\hat{Q}_k\hat{P}_i), \quad i = 1,2,\cdots,n-1. \tag{11.62}$$

将式(11.53)，式(11.61)，式(11.62)代入式(11.59)，就能导出 $\hat{A}$ 的表达式为

$$\hat{A} \equiv \left[\prod_{i=1}^{n-1}\exp(-\mathrm{i}\sum_{k=i+1}^{n} L_{ki}\hat{Q}_i\hat{P}_k)\right]\cdot$$

$$\exp(-\mathrm{i}\sum_{i=1}^{n}(\hat{Q}_i\hat{P}_i + \hat{P}_i\hat{Q}_i)\ln\sqrt{D_{ii}})\cdot$$

$$\left[\prod_{i=1}^{n-1}\exp(-\mathrm{i}\sum_{k=i+1}^{n} U_{ik}\hat{Q}_k\hat{P}_i)\right]. \tag{11.63}$$

总之，使用适当的量子力学表象，把算符写成是该表象中的矩阵的投影算符形式，矩阵的 ***LDU*** 分解就可以映射到希尔伯特空间的算符乘积上，利用这个就可以对算符进行分解，对于分析算符的压缩和纠缠性质是十分有用的. 这种 ***LDU*** 分解和 IWOP 技术结合可以得到很多新的算符恒等式.

# 第 12 章　$s$ 编序算符内的积分技术及其应用

本章旨在量子相空间中引入 $s$ 参数化的广义 Wigner 算符，介绍 $s$ 编序算符内的积分技术（IWSOP，Integration Within S-ordered Product of Operators 的缩写，并用符号Ⓢ…Ⓢ标记），它可以统一正规乘积内的积分技术（$s=1$），反正规乘积内的积分技术（$s=-1$）和 Weyl 编序内的积分技术（$s=0$），并进而导出任意密度算符的 $s$ 编序展开公式，以完善带 $s$ 参数的量子化方案．历史上，Cahill-Glauber 曾在研究量子光学的经典对应理论时引进了带 $s$ 参数的相空间分布函数[183~185]，即当 $s=1,0$ 和 $-1$ 时，它分别退化为 Glauber-Sudarshan$P$ 函数，Wigner 函数和 $Q$ 函数．他们的出发点是着眼于 $D(\alpha,s)\equiv D(\alpha)\mathrm{e}^{s|\alpha|^2}$（其中 $D(\alpha)=\exp[\alpha a^\dagger-\alpha^* a]$ 为平移算符，$[a,a^\dagger]=1$），让微商 $\left.\frac{\partial^{n+m}D(\alpha,s)}{\partial\alpha^n\partial(-\alpha^*)^m}\right|_{\alpha=0}=\{a^{\dagger n}a^m\}$ 的结果来定义算符 $a$ 和 $a^\dagger$ 的带 $s$ 参数的编序规则，即在此微商后取 $\alpha=0$ 的结果来定义 $a^{\dagger n}a^m$ 的排序形式．但是，即使是知道了定义式，求某个算符的 $s$ 编序展开是困难的，需要另想办法．我们提出的 IWSOP 技术可给出任意密度算符的 $s$ 编序展开公式[186]，不但可以完善带 $s$ 参数的算符编序理论，而且指出了其本质，也可以导出许多带 $s$ 参数的新算符恒等式以及量子力学基本表象的 $s$ 编序展开形式．

## 12.1 密度矩阵的 $s$ 编序展开公式与 IWSOP 技术

### 12.1.1 带 $s$ 参数的广义 Wigner 算符与 Weyl 对应规则

通过对比已有的 Wigner 算符[187]，引入一个带 $s$ 参数的广义 Wigner 算符，其形式如下：

$$\Delta_s(\alpha) = \int \frac{d^2\beta}{2\pi^2} \exp\left(\frac{s|\beta|^2}{2} + \beta a^\dagger - \beta^* \alpha - \beta\alpha^* + \beta^* \alpha\right) \tag{12.1}$$

利用 Baker-Hausdorff 公式和 IWOP 技术，对于 $s<1$，得到 $\Delta_s(\alpha)$ 的正规乘积为

$$\begin{aligned}\Delta_s(\alpha) &= \int \frac{d^2\beta}{2\pi^2} : \exp\left[\frac{-(1-s)|\beta|^2}{2} + \beta a^\dagger - \beta^* \alpha - \beta\alpha^* + \beta^* \alpha\right] : \\ &= \frac{1}{(1-s)\pi} : \exp\left[\frac{-2}{1-s}(a^\dagger - \alpha^*)(a-\alpha)\right] : .\end{aligned} \tag{12.2}$$

当 $s=0$ 时，式(12.2)变为一般的 Wigner 算符正规乘积形式

$$\begin{aligned}\Delta_s(\alpha) \to \Delta(\alpha) &= \frac{1}{\pi} : \exp[-2(a^\dagger - \alpha^*)(a-\alpha)] : \\ &= \frac{1}{\pi} : \exp[-(x-\hat{X})^2 - (p-\hat{P})^2] : ,\end{aligned} \tag{12.3}$$

式中：$\hat{X} = \frac{a^\dagger + a}{\sqrt{2}}$，$\hat{P} = \frac{a - a^\dagger}{i\sqrt{2}}$. 另一方面，对于 $s<-1$ 的情况，也可以得到式(12.1)的反正规乘积形式

$$\begin{aligned}\Delta_s(\alpha) &\\ &= \int \frac{d^2\beta}{2\pi^2} \vdots \exp\left[\frac{-(-1-s)|\beta|^2}{2} + \beta a^\dagger - \beta^* \alpha - \beta\alpha^* + \beta^* \alpha\right] \vdots \\ &= \frac{1}{(-1-s)\pi} \vdots \exp\left[\frac{2}{1+s}(a^\dagger - \alpha^*)(a-\alpha)\right] \vdots .\end{aligned} \tag{12.4}$$

根据定义

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}}\exp\left(-\frac{x^2}{\epsilon}\right), \tag{12.5}$$

则对于 $s=-1$,可以得到

$$\begin{aligned}\Delta_{s=-1}(\alpha) &= \vdots\,\delta(a^\dagger-\alpha^*)\delta(a-\alpha)\,\vdots \\ &=\delta(a-\alpha)\delta(a^\dagger-\alpha^*) \\ &=|\,\alpha\rangle\langle\alpha\,|,\end{aligned} \tag{12.6}$$

式中:$|\alpha\rangle=\exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2+\alpha a^\dagger\right)|0\rangle$是相干态(注意这里的 $\Delta_s(\alpha)$ 是广义 Wigner 算符,不能与 Wigner 算符的 $s$ 编序形式混为一谈,见以下式(12.94)).

利用算符公式

$$:\exp[(e^\lambda-1)a^\dagger a]:=e^{\lambda a^\dagger a}, \tag{12.7}$$

式(12.2)变为

$$\begin{aligned}\Delta_s(\alpha) &=\frac{1}{(1-s)\pi}\exp\left(\frac{2}{1-s}\alpha a^\dagger\right):\exp\left[\left(\frac{s+1}{s-1}-1\right)a^\dagger a\right]:\cdot \\ &\quad\exp\left(\frac{2}{1-s}\alpha^* a-\frac{2}{1-s}|\,\alpha\,|^2\right) \\ &=\frac{1}{(1-s)\pi}\exp\left(\frac{2}{1-s}\alpha a^\dagger\right)\exp\left(a^\dagger a\ln\frac{s+1}{s-1}\right)\cdot \\ &\quad\exp\left(\frac{2}{1-s}\alpha^* a-\frac{2}{1-s}|\,\alpha\,|^2\right)\end{aligned} \tag{12.8}$$

从式(12.2)可以得到

$$\begin{aligned}2\int d^2\alpha\Delta_s(\alpha) &=\frac{2}{(1-s)\pi}\int d^2\alpha :\exp\left[\frac{-2}{1-s}(a^\dagger-\alpha^*)(a-\alpha)\right): \\ &=1,\end{aligned} \tag{12.9}$$

即 $\Delta_s(\alpha)$是完备的,所以任一密度算符 $\rho$ 可以展开为

$$\rho = 2\int d^2\alpha\Delta_s(\alpha^*,\alpha)\,\mathfrak{P}(\alpha^*,\alpha), \tag{12.10}$$

这是一个广义的经典-量子对应公式. 当取 $s=0$,式(12.10)就是熟知的 Weyl 对应. 根据式(12.8),并注意到 $\Delta_{-s}(\alpha')$的形式以及

利用相干态表象的完备性 $\int \frac{d^2 z}{\pi} \mid z\rangle\langle z \mid = 1$，能计算出

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}[\Delta_{-s}(\alpha')\Delta_s(\alpha)] \\
&= G\int \frac{d^2 z}{\pi}\langle z \mid \exp\left(\frac{2}{1+s}\alpha' a^\dagger\right)\exp\left(a^\dagger a \ln\frac{s-1}{s+1}\right)\cdot \\
&\quad \exp\left(\frac{2}{1+s}\alpha'^* a\right)\exp\left(\frac{2}{1-s}\alpha a^\dagger\right)\exp\left(a^\dagger a \ln\frac{s+1}{s-1}\right)\cdot \\
&\quad \exp\left(\frac{2}{1-s}\alpha^* a\right)\mid z\rangle \\
&= G\int \frac{d^2 z}{\pi}\langle z \mid \exp\left(\frac{2}{1+s}\alpha' a^\dagger\right)\exp\left(\frac{-2}{1-s}\alpha'^* a\right)\exp\left(\frac{-2}{1+s}\alpha a^\dagger\right)\cdot \\
&\quad \exp\left(\frac{2}{1-s}\alpha^* a\right)\mid z\rangle \\
&= G\exp\left[\frac{4\alpha'^*\alpha}{(1+s)(1-s)}\right]\int \frac{d^2 z}{\pi}\exp\left[\frac{2z^*}{1+s}(\alpha'-\alpha)-\right. \\
&\quad \left.\frac{2z}{1-s}(\alpha'^*-\alpha^*)\right] \\
&= \frac{1}{4\pi}\delta(\alpha'-\alpha)(\alpha'^*-\alpha^*) \\
&= \frac{1}{2\pi}\delta(x'-x)(p'-p),
\end{aligned}
\tag{12.11}
$$

式中：$G \equiv \dfrac{\exp\left(-\frac{2}{1-s}|\alpha|^2-\frac{2}{1+s}|\alpha'|^2\right)}{(1+s)(1-s)\pi^2}$. 因此，给出密度算符 $\rho$ 在带 $s$ 参数的量子化方案中的经典对应函数

$$
\begin{aligned}
&2\pi\mathrm{tr}[\Delta_{-s}(\alpha)\rho] \\
&= 4\pi\int d^2\alpha'\,\mathrm{tr}[\Delta_{-s}(\alpha)\Delta_s(\alpha')]\mathfrak{P}(\alpha';s) \\
&= \int d^2\alpha'\delta(\alpha-\alpha')(\alpha^*-\alpha'^*)\mathfrak{P}(\alpha',s) \\
&= \mathfrak{P}(\alpha,s).
\end{aligned}
\tag{12.12}
$$

式(12.12)和式(12.10)就是以带参数 $s$ 的量子化方案所给出的经

典函数和量子力学算符的一一对应关系，而 Weyl 对应方案是它的一个特例.

### 12.1.2 密度矩阵的 $s$ 编序展开公式——玻色子情况

自然产生的问题是，任一密度矩阵 $\rho$ 的 $s$ 编序展开式是什么？为解此问题，先求出 $\rho=|z\rangle\langle z|$ 的 $s$ 编序展开形式，利用式(12.2)与式(12.12)，有

$$\begin{aligned}
&2\pi\mathrm{tr}[\Delta_{-s}(\alpha)\mid z\rangle\langle z\mid] \\
&=\frac{2}{1+s}\langle z\mid : \exp\left[\frac{-2}{1+s}(a^{\dagger}-\alpha^{*})(a-\alpha)\right]:\mid z\rangle \\
&=\frac{2}{1+s}\exp\left[\frac{-2}{1+s}(z^{*}-\alpha^{*})(z-\alpha)\right],
\end{aligned}\tag{12.13}$$

这就是 $|z\rangle\langle z|$ 的带 $s$ 参数的广义 Weyl 经典对应. 实际上，式(12.13)右边表示一种相空间分布函数，它也满足完备性，即

$$\int\frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}\mid z\rangle\langle z\mid=1\rightarrow\frac{2}{1+s}\int\frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}\exp\left[\frac{-2}{1+s}(z^{*}-\alpha^{*})(z-\alpha)\right]=1.\tag{12.14}$$

算符的每一种广义经典对应的相空间分布函数（由于引入了广义 Wigner 算符）对应于一种算符排序，所以看出 $|z\rangle\langle z|$ 的 $s$ 编序形式为

$$\mid z\rangle\langle z\mid=\frac{2}{1+s}\,\circledS\,\exp\left[\frac{-2}{1+s}(z^{*}-a^{\dagger})(z-a)\right]\circledS,\tag{12.15}$$

其中：Ⓢ…Ⓢ表示 $s$ 编序记号. 这个定义包括了已知的 $|z\rangle\langle z|$ 的几种编序公式. 当 $s=1$ 时，式(12.15)变成为

$$\mid z\rangle\langle z\mid=:\exp[-(z^{*}-a^{\dagger})(z-a)]:,\tag{12.16}$$

说明Ⓢ…Ⓢ变为正规乘积 :…:；当 $s=0$ 时，式(12.15)退化为

$$\mid z\rangle\langle z\mid=2\,\vdots\,\exp[-2(z^{*}-a^{\dagger})(z-a)]\,\vdots,\tag{12.17}$$

说明Ⓢ…Ⓢ变为 Weyl 编序 $\vdots\cdots\vdots$；当 $s=-1$，式(12.15)变为

$$|z\rangle\langle z| = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{2}{\epsilon} ⋮ \exp\left[\frac{2}{\epsilon}(z^* - a^\dagger)(z-a)\right] ⋮$$

$$= ⋮ \delta(z^* - a^\dagger)\delta(z-a) ⋮ , \tag{12.18}$$

说明Ⓢ…Ⓢ就变为反正规乘积编序⋮…⋮.

根据式(12.15)与积分公式

$$e^{-\xi\eta}\int\frac{d^2\beta}{\pi}\beta^{*m}\beta^n\exp(-|\beta|^2 + \beta\xi + \beta^*\eta) = (-i)^{m+n}H_{m,n}(i\xi, i\eta), \tag{12.19}$$

式中：$H_{m,n}(\xi,\eta)$是双变量 Hermite 多项式，导出

$$\begin{aligned} a^n a^{\dagger m} &= \int\frac{d^2 z}{\pi}a^n\,|z\rangle\langle z|\,a^{\dagger m} \\ &= \frac{2}{1+s}Ⓢ\int\frac{d^2 z}{\pi}z^n z^{*m}\exp\left[-\frac{2}{1+s}(z^* - a^\dagger)(z-a)\right]Ⓢ \\ &= \left(\sqrt{\frac{2}{s+1}}\right)^{m+n}Ⓢ\int\frac{d^2 z'}{\pi}z'^{*m}z'^n\exp(-|z'|^2 + \\ &\quad \sqrt{\frac{2}{s+1}}a^\dagger z' + \sqrt{\frac{2}{s+1}}az'^* - \frac{2a^\dagger a}{s+1})Ⓢ \\ &= \left(-i\sqrt{\frac{2}{s+1}}\right)^{m+n}Ⓢ\,H_{m,n}\left(i\sqrt{\frac{2}{s+1}}a^\dagger, i\sqrt{\frac{2}{s+1}}a\right)Ⓢ. \end{aligned} \tag{12.20}$$

从式(12.20)看出，当 $s=1$ 时，变为正规乘积形式

$$a^n a^{\dagger m} = (-i)^{m+n} : H_{m,n}(ia^\dagger, ia) :, \tag{12.21}$$

而对于 $s=0$，变为 Weyl 编序形式

$$a^n a^{\dagger m} = (-i\sqrt{2})^{m+n} ⋮ H_{m,n}(i\sqrt{2}a^\dagger, i\sqrt{2}a) ⋮. \tag{12.22}$$

基于以上讨论，归纳出带 $s$ 参数的有序算符内的积分技术(IWSOP)的性质[186]：

(1) 在 $s$ 编序Ⓢ…Ⓢ内的玻色算符 $a$ 和 $a^\dagger$相互对易，尽管$[a, a^\dagger]=1$，在Ⓢ…Ⓢ内有Ⓢ $aa^\dagger$Ⓢ=Ⓢ $a^\dagger a$ Ⓢ.

(2) $c$ 数可以自由出入 $s$ 编序Ⓢ…Ⓢ记号.

(3) 可以对在 $s$ 编序内的算符函数中含的 $c$ 数做进行积分或

微分运算.

(4) 真空投影算符$|0\rangle\langle 0|$的 $s$ 编序形式是

$$|0\rangle\langle 0| = \frac{2}{1+s}Ⓢ\exp\left(\frac{-2}{1+s}a^{\dagger}a\right)Ⓢ. \tag{12.23}$$

(5) 当取 $s=1,0,-1$ 时,$s$ 编序记号Ⓢ…Ⓢ分别变为 :…:,⋮…⋮,⁝…⁝ 的形式. 这就说明,只要知道密度矩阵 $\rho$ 的 $s$ 编序展开式,便可知道一些具体编序形式.

再根据式(12.15),也可以导出算符 $e^{\lambda a^2}e^{\sigma a^{\dagger 2}}$ 的 $s$ 编序形式:

$$\begin{aligned}
&\exp(\lambda a^2)\exp(\sigma a^{\dagger 2}) \\
&= \int\frac{d^2 z}{\pi}\exp(\lambda a^2)\,|z\rangle\langle z|\,\exp(\sigma a^{\dagger 2}) \\
&= \frac{2}{1+s}\int\frac{d^2 z}{\pi}Ⓢ\exp\left(\lambda z^2+\sigma z^{*2}-\frac{2}{1+s}(z^*-a^{\dagger})(z-a)\right)Ⓢ \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\lambda\sigma(s+1)^2}}Ⓢ\exp\left[\frac{\sigma a^{\dagger 2}+\lambda a^2+2(s+1)\lambda\sigma a^{\dagger}a}{1-\lambda\sigma(s+1)^2}\right]Ⓢ,
\end{aligned} \tag{12.24}$$

这里已用积分公式

$$\begin{aligned}
&\int\frac{d^2 z}{\pi}\exp(\zeta|z|^2+\xi z+\eta z^*+fz^2+gz^{*2}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\zeta^2-4fg}}\exp\left[\frac{-\zeta\xi\eta+\xi^2 g+\eta^2 f}{\zeta^2-4fg}\right],
\end{aligned} \tag{12.25}$$

它要求 $\mathrm{Re}(\zeta+f+g)<0$,$\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta^2-4fg}{\zeta+f+g}\right)<0$ 或者 $\mathrm{Re}(\zeta-f-g)<0$,$\mathrm{Re}\left(\frac{\zeta^2-4fg}{\zeta-f-g}\right)<0$. 于是,从式(12.24)结果看出当 $s=1$ 时,

$$\exp(\lambda a^2)\exp(\sigma a^{\dagger 2}) = \frac{1}{\sqrt{1-4\lambda\sigma}}:\exp\left[\frac{\sigma a^{\dagger 2}+\lambda a^2+4\lambda\sigma a^{\dagger}a}{1-4\lambda\sigma}\right]:; \tag{12.26}$$

当 $s=0$ 时,

$$\exp(\lambda a^2)\exp(\sigma a^{\dagger 2}) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda\sigma}}\vdots\exp\left[\frac{\sigma a^{\dagger 2}+\lambda a^2+2\lambda\sigma a^{\dagger}a}{1-\lambda\sigma}\right]\vdots. \tag{12.27}$$

下面求出任一密度算符 $\rho$ 的 $s$ 编序展开式. 根据式(12.15)和 $P$ 表示[188]

$$\rho=\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}P(z)\mid z\rangle\langle z\mid,\tag{12.28}$$

有

$$\rho=\frac{2}{1+s}\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}P(z)\circledS\exp\left[\frac{-2}{1+s}(z^*-a^\dagger)(z-a)\right]\circledS.\tag{12.29}$$

现在利用 Mehta 的 $P(z)$ 的表达式[189]

$$P(z)=\mathrm{e}^{|z|^2}\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\langle-\beta\mid\rho\mid\beta\rangle\exp(\mid\beta\mid^2+\beta^*z-\beta z^*),\tag{12.30}$$

式中: $|\beta\rangle$ 也是相干态, 把式(12.29)代入式(12.30), 并考虑 $\langle-\beta|\beta\rangle=\mathrm{e}^{-2|\beta|^2}$, 得到

$$\begin{aligned}\rho=&\frac{2}{1+s}\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\langle-\beta\mid\rho\mid\beta\rangle\mathrm{e}^{|\beta|^2}\cdot\\&\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\circledS\exp\left[\mid z\mid^2+\beta^*z-\beta z^*-\frac{2}{1+s}(z^*-a^\dagger)(z-a)\right]\circledS\\=&\frac{2}{1-s}\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\langle-\beta\mid\rho\mid\beta\rangle\cdot\\&\circledS\exp\left[\frac{2}{s-1}(s\mid\beta\mid^2-\beta^*a+\beta a^\dagger-a^\dagger a)\right]\circledS,\end{aligned}\tag{12.31}$$

这就是密度算符 $\rho$ 的 $s$ 编序展开公式. 可以看出, 一旦 $\rho$ 的相干态矩阵元 $\langle-\beta|\rho|\beta\rangle$ 已知, 便可用 IWSOP 技术在Ⓢ…Ⓢ内积分直接给出 $\rho$ 的 $s$ 编序形式. 从式(12.31)看出, 当 $s=0$ 时, 式(12.31)变为

$$\rho=2\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\langle-\beta\mid\rho\mid\beta\rangle\,\vdots\exp[2(\beta^*a-\beta a^\dagger+a^\dagger a)]\vdots,\tag{12.32}$$

这正是将 $\rho$ 转变为 Weyl 编序形式的公式; 而对于 $s=-1$, 式(12.31)就变为

$$\rho=2\int\frac{d^2\beta}{\pi}\langle-\beta\mid\rho\mid\beta\rangle\ \vdots\exp(\mid\beta\mid^2+\beta^*a-\beta a^\dagger+a^\dagger a)\vdots, \tag{12.33}$$

这就是$\rho$的反正规乘积展开式.

作为式(12.31)的应用,求算符$e^{\lambda a^\dagger a}$的$s$编序形式. 将式(12.7)代入式(12.31)并利用IWSOP技术积分,得到一个新的算符公式

$$\begin{aligned}e^{\lambda a^\dagger a}&=\frac{2}{1-s}\int\frac{d^2\beta}{\pi}\langle-\beta\mid e^{(1-e^\lambda)|\beta|^2}\mid\beta\rangle\}\cdot\\&\quad Ⓢ\exp\left[\frac{2}{s-1}(s\mid\beta\mid^2-\beta^*a+\beta a^\dagger-a^\dagger a)\right]Ⓢ\\&=\frac{2}{1-s}\int\frac{d^2\beta}{\pi}Ⓢ\exp\Big[(-1-e^\lambda)\mid\beta\mid^2+\\&\quad\frac{2}{s-1}(s\mid\beta\mid^2-\beta^*a+\beta a^\dagger-a^\dagger a)\Big]Ⓢ\\&=\frac{2}{1+s-se^\lambda+e^\lambda}Ⓢ\exp\left[\frac{2(e^\lambda-1)}{1+s-se^\lambda+e^\lambda}a^\dagger a\right]Ⓢ.\end{aligned}\tag{12.34}$$

可以看出,当$s=1,0,-1$时,上式分别变为

$$e^{\lambda a^\dagger a}=\begin{cases}:\exp[(e^\lambda-1)a^\dagger a]: & (s=1)\\ \dfrac{2}{1+e^\lambda}\vdots\exp\left(\dfrac{2e^\lambda-2}{1+e^\lambda}aa^\dagger\right)\vdots & (s=0)\\ e^{-\lambda}\vdots\exp(1-e^{-\lambda}aa^\dagger)\vdots & (s=-1)\end{cases}.\tag{12.35}$$

最后,计算$\Delta_s(\alpha^*,\alpha)$的$s$编序算符展开形式,

$$\begin{aligned}&\Delta_s(\alpha^*,\alpha)\\&=\frac{2}{(1-s)^2\pi}\int\frac{d^2\beta}{\pi}\langle-\beta\mid:\exp\left[\frac{-2}{1-s}(a^\dagger-\alpha^*)(a-\alpha)\right]:\mid\beta\rangle\cdot\\&\quad Ⓢ\exp\left[\frac{2}{s-1}(s\mid\beta\mid^2-\beta^*a+\beta a^\dagger-a^\dagger a)\right]Ⓢ\\&=\frac{2}{(1-s)^2\pi}\int\frac{d^2\beta}{\pi}Ⓢ\exp\Big\{-2\mid\beta\mid^2+\end{aligned}$$

$$\left.\frac{2}{s-1}[(-\beta^* - \alpha^*)(\beta-\alpha)+s|\beta|^2-\beta^* a+\beta a^\dagger - a^\dagger a)]\right\}Ⓢ$$

$$= \frac{2}{(1-s)^2} Ⓢ\, \delta\left[\frac{2}{s-1}(a^\dagger - \alpha^*)\right]\delta\left[\frac{2}{s-1}(a-\alpha)\right]Ⓢ$$

$$= \frac{1}{2} Ⓢ\, \delta(a^\dagger - \alpha^*)\delta(a-\alpha)\, Ⓢ. \tag{12.36}$$

## 12.2 $s$ 编序算符的恒等式

接下来,用 $s$ 编序展开式(12.31)与带 $s$ 参数的有序算符内积分技术来解决若干关键问题[189],即一些常用的算符其 $s$ 编序展开到底是什么.

### 12.2.1 $a^{\dagger m}a^n$ 的 $s$ 编序展开形式

将 $\rho=a^{\dagger m}a^n$ 代入到式(12.31),并利用积分公式

$$(-1)^m e^{\xi\eta}\int \frac{d^2\beta}{\pi}\beta^{*m}\beta^n \exp(-|\beta|^2-\xi\beta+\eta\beta^*) = H_{m,n}(\xi,\eta), \tag{12.37}$$

可得到

$$\begin{aligned}
&a^{\dagger m}a^n \\
&= (-1)^m \frac{2}{1-s}\int \frac{d^2\beta}{\pi}\beta^{*m}\beta^n \cdot \\
&\quad Ⓢ \exp\left[\frac{-2}{1-s}|\beta|^2 - \frac{2}{1-s}(\beta a^\dagger - \beta^* a - a^\dagger a)\right]Ⓢ \\
&= (-1)^m \left(\frac{1-s}{2}\right)^{(n+m)/2}\int \frac{d^2\beta'}{\pi}\beta'^{*m}\beta'^n\, Ⓢ \exp\left(-|\beta'|^2 - \right. \\
&\quad \left.\beta'\sqrt{\frac{2}{1-s}}a^\dagger + \beta'^*\sqrt{\frac{2}{1-s}}a - \frac{2}{s-1}a^\dagger a\right)Ⓢ \\
&= \left(\frac{1-s}{2}\right)^{(n+m)/2} Ⓢ\, H_{m,n}\left(\sqrt{\frac{2}{1-s}}a^\dagger, \sqrt{\frac{2}{1-s}}a\right)Ⓢ. \qquad (12.38)
\end{aligned}$$

因此,算符 $a^{\dagger m}a^n$ 在 $s$ 参量量子化方案下的经典对应为

$$\left(\frac{1-s}{2}\right)^{(n+m)/2}\mathrm{H}_{m,n}\left(\sqrt{\frac{2}{1-s}}\alpha^*,\sqrt{\frac{2}{1-s}}\alpha\right)\rightarrow a^{\dagger m}a^n, \tag{12.39}$$

这就是算符 $s$ 参量量子化方案的本质. 特别地,当取 $s=0$ 时,式(12.38)变为 Weyl 编序形式

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{(n+m)/2} \vdots\, \mathrm{H}_{m,n}(\sqrt{2}a^{\dagger},\sqrt{2}a)\,\vdots = a^{\dagger m}a^n; \tag{12.40}$$

当取 $s=-1$,则转化为反正规乘积形式

$$\vdots\, \mathrm{H}_{m,n}(a^{\dagger},a)\,\vdots = a^{\dagger m}a^n, \tag{12.41}$$

这与我们已知的结果是完全一致的.

### 12.2.2 Ⓢ $a^{\dagger m}a^n$ Ⓢ的正规乘积形式

首先,根据 δ 函数性质,很容易得到

$$Ⓢ\, a^{\dagger m}a^n\, Ⓢ = \int \mathrm{d}^2\alpha\alpha^n\alpha^{*m}\, Ⓢ\, \delta(a^{\dagger}-\alpha^*)\delta(a-\alpha)\, Ⓢ, \tag{12.42}$$

再根据式(12.2)与式(12.36)的结果并用式(12.19),有

$$\begin{aligned}
Ⓢ\, a^{\dagger m}a^n\, Ⓢ &= \frac{2}{1-s}\int\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}\alpha^n\alpha^{*m}\cdot \\
&\quad :\exp\left[\frac{-2|\alpha|^2}{1-s}+\frac{2}{1-s}(a^{\dagger}\alpha+\alpha^*a)-\frac{2a^{\dagger}a}{1-s}\right]: \\
&= \left(\frac{1-s}{2}\right)^{(m+n)/2}\int\frac{\mathrm{d}^2\alpha'}{\pi}\alpha'^n\alpha'^{*m}\cdot \\
&\quad :\exp\left[-|\alpha|^2+\sqrt{\frac{2}{1-s}}(a^{\dagger}\alpha'+\alpha'^*a)-\frac{2a^{\dagger}a}{1-s}\right]: \\
&= (-\mathrm{i})^{n+m}\left(\frac{1-s}{2}\right)^{(m+n)/2}\cdot \\
&\quad :\mathrm{H}_{m,n}\left(\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{1-s}}a^{\dagger},\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{1-s}}a\right):,
\end{aligned} \tag{12.43}$$

这就是Ⓢ $a^{\dagger m}a^n$ Ⓢ的正规乘积形式. 注意到式(12.38)与式(12.43)对 $s$ 参数量子化规则而言是互逆的. 所以,从式(12.43),

得到 $\alpha^n\alpha^{*m}$ 的量子化表达式

$$\alpha^n\alpha^{*m} \to (-\mathrm{i})^{n+m}\left(\frac{1-s}{2}\right)^{(m+n)/2} : \mathrm{H}_{m,n}\left(\mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{1-s}}a^\dagger, \mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{1-s}}a\right):. \tag{12.44}$$

将双变量 Hermite 多项式的定义式

$$\mathrm{H}_{m,n}(\xi,\eta) = \sum_{l=0}^{\min(m,n)} \frac{m!n!(-1)^l\xi^{m-l}\eta^{n-l}}{l!(m-l)!(n-l)!} \tag{12.45}$$

与 Laguerre 多项式 $\mathrm{L}_n^{(\mu)}(x)$的定义式

$$\mathrm{L}_n^{(\mu)}(x) = \sum_{l=0}^{n} \frac{(n+\mu)!}{(n-l)!(\mu+l)!}\frac{(-x)^l}{l!} \tag{12.46}$$

作比较，可以得到如下关系式：

$$\mathrm{H}_{m,n}(\xi,\kappa) = \begin{cases} n!(-1)^n\xi^{m-n}\mathrm{L}_n^{(m-n)}(\xi\kappa) & m > n \\ m!(-1)^m\kappa^{n-m}\mathrm{L}_m^{(n-m)}(\xi\kappa) & m < n \end{cases}. \tag{12.47}$$

再根据式(12.47)，当 $m<n$ 时，式(12.43)变为

$$Ⓢ\, a^{\dagger m}a^n\, Ⓢ = \left(\frac{1-s}{2}\right)^m m! : \mathrm{L}_m^{(n-m)}\left(\frac{2a^\dagger a}{s-1}\right): a^{n-m}; \tag{12.48}$$

当 $m>n$ 时，则变为

$$Ⓢ\, a^{\dagger m}a^n\, Ⓢ = \left(\frac{1-s}{2}\right)^n n!a^{\dagger m-n} : \mathrm{L}_n^{(m-n)}\left(\frac{2a^\dagger a}{s-1}\right):. \tag{12.49}$$

### 12.2.3 Ⓢ $a^{\dagger m}a^n$ Ⓢ的 $s'$编序展开形式

当 $\rho=$Ⓢ $a^{\dagger m}a^n$ Ⓢ时，求其相应的 $s'$编序展开形式，利用式(12.31)和式(12.43)，有

$$Ⓢ\, a^{\dagger m}a^n\, Ⓢ = \frac{2}{1-s'}\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\langle-\beta|\,Ⓢ\, a^{\dagger m}a^n\, Ⓢ\,|\beta\rangle \cdot$$

$$Ⓢ'\exp\left[\frac{2}{s'-1}(s'|\beta|^2-\beta^*a+\beta a^\dagger-a^\dagger a)\right]Ⓢ'$$

$$=\frac{2(-\mathrm{i})^{n+m}}{1-s'}\left(\frac{1-s}{2}\right)^{(m+n)/2}\cdot$$

$$\int \frac{d^2\beta}{\pi} H_{m,n}\left(-i\sqrt{\frac{2}{1-s}}\beta^*, i\sqrt{\frac{2}{1-s}}\beta\right) \cdot$$

$$Ⓢ' \exp\left[\frac{-2}{1-s'}|\beta|^2 + \frac{2}{s'-1}(-\beta^* a + \beta a^\dagger - a^\dagger a)\right] Ⓢ'$$

$$= \frac{2(-i)^{n+m}}{1-s'}\left(\frac{1-s}{2}\right)^{(m+n)/2} \frac{\partial^{m+n}}{\partial t^m \partial \tau^n} \int \frac{d^2\beta}{\pi} Ⓢ' \exp\left[\frac{2}{s'-1}|\beta|^2 + \right.$$

$$\left(i\tau\sqrt{\frac{2}{1-s}} + \frac{2a^\dagger}{s'-1}\right)\beta - \left(it\sqrt{\frac{2}{1-s}} + \frac{2a}{s'-1}\right)\beta^* -$$

$$\left.\frac{2a^\dagger a}{s'-1} - t\tau\right]_{t=\tau=0} Ⓢ'$$

$$= (-i)^{n+m}\left(\frac{s'-s}{2}\right)^{(m+n)/2} Ⓢ' H_{m,n}\left(i\sqrt{\frac{2}{s'-s}}a^\dagger, i\sqrt{\frac{2}{s'-s}}a\right) Ⓢ', \tag{12.50}$$

这里，已用了双变量 Hermite 多项式的母函数

$$H_{m,n}(\xi,\eta) = \frac{\partial^{m+n}}{\partial t^m \partial \tau^n} \exp(-t\tau + t\xi + \tau\eta)\,|_{t=\tau=0}, \tag{12.51}$$

尤其当 $s'=1$ 时，式(12.50)变成式(12.43).

利用式(12.47)与式(12.50)，对于 $m>n$ 的情况，有

$$Ⓢ\, a^{\dagger m} a^n\, Ⓢ = (-i)^{n+m}\left(\frac{s'-s}{2}\right)^{\frac{m+n}{2}} n!(-1)^n \cdot$$

$$Ⓢ'\left(i\sqrt{\frac{2}{s'-s}}a^\dagger\right)^{m-n} L_n^{(m-n)}\left(\frac{2a^\dagger a}{s-s'}\right) Ⓢ'$$

$$= n!\left(\frac{s'-s}{2}\right)^n Ⓢ' a^{\dagger m-n} L_n^{m-n}\left(\frac{2a^\dagger a}{s-s'}\right) Ⓢ'; \tag{12.52}$$

而对于 $m<n$ 的情况，则有

$$Ⓢ\, a^{\dagger m} a^n\, Ⓢ = m!\left(\frac{s'-s}{2}\right)^m Ⓢ' a^{n-m} L_m^{n-m}\left(\frac{2a^\dagger a}{s-s'}\right) Ⓢ'. \tag{12.53}$$

以上方法较之文献[184]的推导更为简明、实用.

## 12.3 量子力学基本表象的 $s$ 编序展开式

借助 $s$ 编序展开式(12.31),可以把坐标表象,动量表象,纠缠态表象纳入 $s$ 编序形式,并可用其导出一些新算符恒等式,特别给出了单模与双模的压缩算符的 $s$ 编序形式[190]. 从而进一步表明 Dirac的符号法(表象理论)应该成为 Newton-Leibniz 积分理论的一个新发展方向.

### 12.3.1 坐标表象与动量表象的 $s$ 编序形式

在前面已知道坐标表象 $|x\rangle$ 在 Fock 表象中形式 $|x\rangle=\pi^{-1/4}\exp\left(-\frac{x^2}{2}+\sqrt{2}xa^\dagger-\frac{a^{\dagger 2}}{2}\right)|0\rangle$,满足 $\hat{X}|x\rangle=x|x\rangle$ 并根据与相干态的内积为 $\langle\beta|x\rangle=\pi^{-1/4}\exp\left(-\frac{x^2}{2}+\sqrt{2}x\beta^*-\frac{\beta^{*2}}{2}-\frac{|\beta|^2}{2}\right)$,于是根据 IWSOP 技术与式(12.31),就有

$$
\begin{aligned}
&|x\rangle\langle x| \\
&=\frac{2}{1-s}\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi^{3/2}}\circledS\exp\left[\frac{s+1}{s-1}|\beta|^2+\beta(\sqrt{2}x+\frac{2}{s-1}a^\dagger)-\right. \\
&\qquad\left.\beta^*\left(\sqrt{2}x+\frac{2}{s-1}a\right)-\frac{\beta^2+\beta^{*2}}{2}-\frac{2}{s-1}a^\dagger a-x^2\right]\circledS \\
&=\frac{1}{\sqrt{s\pi}}\circledS\exp\left\{-\frac{1}{s}\left[x^2-\sqrt{2}x(a+a^\dagger)+a^\dagger a+\frac{a^2+a^{\dagger 2}}{2}\right]\right\}\circledS \\
&=\frac{1}{\sqrt{s\pi}}\circledS\exp\left[-\frac{1}{s}(x-\hat{X})^2\right]\circledS,
\end{aligned}
\tag{12.54}
$$

这是正态分布的形式,式中:$\hat{X}=(a+a^\dagger)/\sqrt{2}$. 特殊情况,当 $s=1$ 时,

$$
|x\rangle\langle x|=\frac{1}{\sqrt{\pi}}:\exp[-(x-\hat{X})^2]:; \tag{12.55}
$$

当 $s=0$ 时,用 $\delta(x)=\lim\limits_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}}\exp(-x^2/\epsilon)$,式(12.54)变为

$$|x\rangle\langle x| = \delta(x-\hat{X}) = \vdots\,\delta(x-\hat{X})\,\vdots. \tag{12.56}$$

注意对于 $s=-1$ 的情况，该指数是发散的，所以 $|x\rangle\langle x|$ 的反正规乘积形式不存在. 再根据其完备性关系，也能得到在 $s$ 编序内纯 Guass 积分形式

$$\int \mathrm{d}x\,|x\rangle\langle x| = \frac{1}{\sqrt{s\pi}} \text{Ⓢ} \int \mathrm{d}x \exp[-(x-\hat{X})^2/s] \text{Ⓢ} = 1. \tag{12.57}$$

类似地，对于动量表象 $|p\rangle$，有

$$|p\rangle\langle p| = \frac{1}{\sqrt{s\pi}} \text{Ⓢ} \exp[-(p-\hat{P})^2/s] \text{Ⓢ}, \tag{12.58}$$

其相应完备性为

$$\int \mathrm{d}p\,|p\rangle\langle p| = \frac{1}{\sqrt{s\pi}} \int \mathrm{d}p \text{ Ⓢ} \exp[-(p-\hat{P})^2/s] \text{Ⓢ} = 1. \tag{12.59}$$

作为式(12.54)与式(12.57)的应用，可以导出有关算符 $\hat{X}$ 的 Hermite 多项式的 $s$ 编序形式，

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_n(\hat{X}) &= \int \mathrm{d}x \mathrm{H}_n(x)\,|x\rangle\langle x| \\ &= \frac{1}{\sqrt{s\pi}} \int \mathrm{d}x \text{ Ⓢ } \mathrm{H}_n(x) \exp\left[-\frac{1}{s}(x-\hat{X})^2\right] \text{Ⓢ} \\ &= (\sqrt{1-s})^n \text{ Ⓢ } \mathrm{H}_n\left(\frac{\hat{X}}{\sqrt{1-s}}\right) \text{Ⓢ}, \end{aligned} \tag{12.60}$$

这里

$$\mathrm{H}_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k n!(2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!} = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \exp(2xt-t^2)\bigg|_{t=0}, \tag{12.61}$$

这里已考虑了相关积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{2u}} \mathrm{H}_m(x)\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi u}(1-2u)^{m/2} \mathrm{H}_m\left(\frac{y}{\sqrt{1-2u}}\right),$$

$$2u \neq 1. \tag{12.62}$$

对于特殊情况 $s=-1,0,1$,就有

$$\mathrm{H}_n(\hat{X}) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}} :\mathrm{H}_n\left(\frac{\hat{X}}{\sqrt{2}}\right):, & s=-1 \\ \vdots\, \mathrm{H}_n(\hat{X})\, \vdots, & s=0 \\ 2^n :\hat{X}^n:, & s=1 \end{cases}, \tag{12.63}$$

这与第 7 章中的结果一样. 另一方面,根据式(12.63)与式(12.31)以及利用积分公式(12.37),有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{H}_n(\hat{X}) \\
&= \frac{2^{1+\frac{n}{2}}}{1-s}\int \frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}(\beta-\beta^*)^n \cdot \\
&\quad Ⓢ \exp\left[-\frac{2|\beta|^2}{1-s}+\frac{2}{s-1}(\beta a^\dagger-\beta^* a-a^\dagger a)\right]Ⓢ \\
&= \frac{2^{1+\frac{n}{2}}}{1-s}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!(-1)^k}{(n-k)!k!}\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\beta^{n-k}\beta^{*k} \cdot \\
&\quad Ⓢ \exp\left[-\frac{2|\beta|^2}{1-s}+\frac{2}{s-1}(\beta a^\dagger-\beta^* a-a^\dagger a)\right]Ⓢ \\
&= (1-s)^{\frac{n}{2}}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}Ⓢ\, \mathrm{H}_{k,n-k}\left(a^\dagger\sqrt{\frac{2}{1-s}}, a\sqrt{\frac{2}{1-s}}\right)Ⓢ.
\end{aligned} \tag{12.64}$$

当 $s=0$,式(12.64)变成 Weyl 编序表达式

$$\mathrm{H}_n(\hat{X}) = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\,\vdots\, \mathrm{H}_{k,n-k}(\sqrt{2}a^\dagger,\sqrt{2}a)\,\vdots. \tag{12.65}$$

与 $\mathrm{H}_n(\hat{X}) = \vdots\, \mathrm{H}_n\left(\frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}\right)\vdots$ 比较,就得到一个新等式

$$\mathrm{H}_n\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\mathrm{H}_{k,n-k}(\sqrt{2}y,\sqrt{2}x). \tag{12.66}$$

可见当算符从一种排序变为另一种排序时，就会引出一些新的恒等式．此外，利用式(12.57)与式(12.61)以及积分公式

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\pi}} x^n \exp\left[-\frac{1}{\sigma}(x-y)^2\right] = \frac{(\sqrt{\sigma})^{n+1}}{(2\mathrm{i})^n} \mathrm{H}_n\left(\frac{\mathrm{i}y}{\sqrt{\sigma}}\right), \quad (12.67)$$

则得到有 $\hat{X}^n$ 的 $s$ 编序形式，即

$$\begin{aligned}
\hat{X}^n &= \int \mathrm{d}x x^n \mid x\rangle\langle x \mid \\
&= \int \mathrm{d}x x^n \frac{1}{\sqrt{s\pi}} \circledS \exp\left[-\frac{1}{s}(x-\hat{X})^2\right] \circledS \\
&= \left(\frac{\sqrt{s}}{2\mathrm{i}}\right)^n \circledS \mathrm{H}_n\left(\frac{\mathrm{i}\hat{X}}{\sqrt{s}}\right) \circledS.
\end{aligned} \quad (12.68)$$

同样的方法，也能得到 $\mathrm{e}^{\lambda\hat{X}^2}$ 的 $s$ 编序形式

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\lambda\hat{X}^2} &= \int \mathrm{d}x \mathrm{e}^{\lambda x^2} \mid x\rangle\langle x \mid \\
&= \frac{1}{\sqrt{s\pi}} \int \mathrm{d}x \circledS \exp\left[-\left(\frac{1}{s}-\lambda\right)x^2 + \frac{1}{s}\sqrt{2}x(a+a^\dagger) - \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{s}a^\dagger a - \frac{1}{s}\frac{a^2+a^{\dagger 2}}{2}\right] \circledS \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-s\lambda}} \circledS \exp\left[\frac{\lambda}{2(1-s\lambda)}a^2 + \frac{\lambda}{1-s\lambda}aa^\dagger + \right. \\
&\quad \left. \frac{\lambda}{2(1-s\lambda)}a^{\dagger 2}\right] \circledS.
\end{aligned} \quad (12.69)$$

对于 $s=1,0,-1$ 的情况，上式分别转化为

$$\exp(\lambda\hat{X}^2) = \begin{cases}
\dfrac{1}{\sqrt{1-\lambda}} : \exp\left(\dfrac{1}{1-\lambda}\hat{X}^2\right) :, & s=1 \\
\vdots \exp(\lambda\hat{X}^2) \vdots, & s=0 \\
\dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda}} \vdots \exp\left(\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\hat{X}^2\right) \vdots, & s=-1
\end{cases}, \quad (12.70)$$

最后，计算出单模压缩算符$U_1(\mu)$的 $s$ 编序形式. 根据坐标表象中的单模压缩算符为[191]

$$U_1(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mu}}\left|\frac{x}{\mu}\right\rangle\langle x|=\exp\left[\frac{\lambda}{2}(a^2-a^{\dagger 2})\right],\quad \mu=\mathrm{e}^{\lambda}\tag{12.71}$$

只要利用式(12.31)计算出$\left|\frac{x}{\mu}\right\rangle\langle x|$的 $s$ 编序表达式，即

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{x}{\mu}\right\rangle\langle x|\\
&=\frac{2}{(1-s)\sqrt{\pi}}Ⓢ\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\exp\left[-\frac{1+s}{1-s}|\beta|^2+\left(\sqrt{2}x+\frac{2}{s-1}a^{\dagger}\right)\beta-\right.\\
&\quad\left.\left(\sqrt{2}\frac{x}{\mu}+\frac{2}{s-1}a\right)\beta^*-\frac{\beta^2+\beta^{*2}}{2}-\frac{x^2}{2}\left(1+\frac{1}{\mu^2}\right)-\frac{2}{s-1}a^{\dagger}a\right]Ⓢ\\
&=\frac{1}{\sqrt{s\pi}}Ⓢ\exp\left[-\frac{1}{2s}a^2-\frac{1}{2s}a^{\dagger 2}+\frac{1}{\sqrt{2}s}\frac{x}{\mu}(s+\mu-s\mu+1)a^{\dagger}-\right.\\
&\quad\frac{1}{s}aa^{\dagger}+\frac{1}{\sqrt{2}s}\frac{x}{\mu}(\mu-s+s\mu+1)a-\\
&\quad\left.\frac{x^2}{4s\mu^2}(s^2\mu^2-2s^2\mu+s^2+\mu^2+2\mu+1)\right]Ⓢ.
\end{aligned}\tag{12.72}$$

然后，将上式的结果代入到式(12.71)，便有

$$\begin{aligned}
U_1(\mu)=&\sqrt{\frac{4\mu}{s^2\mu^2-2s^2\mu+s^2+\mu^2+2\mu+1}}\cdot\\
&Ⓢ\exp\left[\frac{(\mu^2-1)(a^2-a^{\dagger 2})-2s(\mu-1)^2aa^{\dagger}}{s^2\mu^2-2s^2\mu+s^2+\mu^2+2\mu+1}\right]Ⓢ.
\end{aligned}\tag{12.73}$$

同样地，当 $s=-1,0,1$，式(12.73)分别退化为反正规、Weyl 编序和正规的形式

$$U_1(\mu)=\sqrt{\frac{2\mu}{\mu^2+1}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}a^{\dagger 2}\right)\vdots\exp\left[-\frac{(\mu-1)^2}{\mu^2+1}aa^{\dagger}\right]\cdot$$

$$
\vdots \exp\left(\frac{1}{2}\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}a^2\right)
$$

$$
=\frac{2\sqrt{\mu}}{\mu+1}\vdots \exp\left[\frac{\mu-1}{\mu+1}(a^2-a^{\dagger 2})\right]\vdots
$$

$$
=\sqrt{\frac{2\mu}{\mu^2+1}}\exp\left(\frac{\mu^2-1}{2\mu^2+2}a^2\right)\vdots \exp\left[\frac{(\mu-1)^2}{\mu^2+1}aa^{\dagger}\right]\vdots \cdot
$$

$$
\exp\left(-\frac{\mu^2-1}{2\mu^2+2}a^{\dagger 2}\right) \tag{12.74}
$$

### 12.3.2 纠缠态表象的 s 编序形式

下面，很自然地将式(12.31)扩展到两模情况，即对于两模情况的密度算符 $\rho$，有

$$
\rho=\left(\frac{2}{1-s}\right)^2\int\frac{\mathrm{d}^2\beta\mathrm{d}^2\beta'}{\pi^2}\langle-\beta,-\beta'\mid\rho\mid\beta,\beta'\rangle\cdot
$$

$$
\circledS \exp\left[\frac{2}{s-1}(s\mid\beta\mid^2+s\mid\beta'\mid^2-\beta^* a+\beta a^{\dagger}-\beta'^* b+\right.
$$

$$
\left.\beta' b^{\dagger}-a^{\dagger}a-b^{\dagger}b)\right]\circledS, \tag{12.75}
$$

式中：$|\beta,\beta'\rangle\equiv\beta\rangle_1|\beta'\rangle_2$ 是双模相干态. 基于此，可以计算 Fan-Klauder 纠缠态投影算符 $|\eta\rangle\langle\eta|$ 的 $s$ 编序形式. 根据 $|\eta\rangle$ 的具体形式

$$
|\eta\rangle=\exp\left(-\frac{|\eta|^2}{2}+\eta a^{\dagger}-\eta^* b^{\dagger}+a^{\dagger}b^{\dagger}\right)|00\rangle, \tag{12.76}
$$

再利用式(12.75)，能计算出

$$
|\eta\rangle\langle\eta|=\frac{4}{1-s^2}\int\frac{\mathrm{d}^2\beta'}{\pi}\circledS \exp\left[-\frac{4s}{1-s^2}\mid\beta'\mid^2+\beta'\left(\frac{2}{s-1}b^{\dagger}-\right.\right.
$$

$$
\left.\frac{(1-s)\eta-2a}{1+s}-\eta\right)+\beta'^*\left(\frac{(1-s)\eta^*-2a^{\dagger}}{1+s}+\eta^*-\right.
$$

$$
\left.\frac{2}{s-1}b\right)-|\eta|^2-\frac{2}{s-1}a^{\dagger}a-\frac{2}{s-1}b^{\dagger}b+\frac{4}{s^2-1}a^{\dagger}a+
$$

$$\frac{2}{1+s}a^{\dagger}\eta+\frac{s-1}{1+s}|\eta|^{2}+\frac{2}{1+s}\eta^{*}a\Big]Ⓢ$$

$$=\frac{1}{s}Ⓢ\exp\Big[-\frac{1}{s}(\eta-a+b^{\dagger})(\eta^{*}-a^{\dagger}+b)\Big]Ⓢ,\quad(12.77)$$

这也是一个正态分布形式.也很容易看出,相应的完备关系具有

$$\int\frac{d^{2}\eta}{\pi}|\eta\rangle\langle\eta|$$
$$=\frac{1}{s}\int\frac{d^{2}\eta}{\pi}Ⓢ\exp\Big[-\frac{1}{s}(\eta-a+b^{\dagger})(\eta^{*}-a^{\dagger}+b)\Big]Ⓢ=1.\quad(12.78)$$

类似的方法,对于另一纠缠态表象$|\xi\rangle$

$$|\xi\rangle=\exp\Big(-\frac{1}{2}|\xi|^{2}+\xi a^{\dagger}+\xi^{*}b^{\dagger}-a^{\dagger}b^{\dagger}\Big)|00\rangle,\quad(12.79)$$

其满足

$$(a+b^{\dagger})|\xi\rangle=\xi|\xi\rangle,\qquad(a^{\dagger}+b)|\xi\rangle=\xi^{*}|\xi\rangle.\quad(12.80)$$

也可以计算出

$$|\xi\rangle\langle\xi|=\frac{1}{s}Ⓢ\exp\Big[-\frac{1}{s}(\xi^{*}-a^{\dagger}-b)(\xi-b^{\dagger}-a)\Big]Ⓢ\quad(12.81)$$

与

$$\int\frac{d^{2}\xi}{\pi}|\xi\rangle\langle\xi|$$
$$=\frac{1}{s}\int\frac{d^{2}\xi}{\pi}Ⓢ\exp\Big(-\frac{1}{s}(\xi^{*}-a^{\dagger}-b)(\xi-b^{\dagger}-a)\Big)Ⓢ=1.\quad(12.82)$$

为了得到双模压缩算符[192]

$$U_{2}(\mu)=\int\frac{d^{2}\eta}{\mu\pi}\left|\frac{\eta}{\mu}\right\rangle\langle\eta|=\exp[\lambda(a^{\dagger}b^{\dagger}-ab)],\quad(\mu=e^{\lambda})\quad(12.83)$$

的 $s$ 编序表达式，利用式(12.75)，首先计算 $\left|\frac{\eta}{\mu}\right\rangle\langle\eta|$ 的 $s$ 编序表达式，即

$$\left|\frac{\eta}{\mu}\right\rangle\langle\eta|=\frac{4}{1-s^2}\int\frac{\mathrm{d}^2\beta'}{\pi}\,Ⓢ\exp\Big[-\frac{4s}{1-s^2}|\beta'|^2+\Big(\frac{2a\mu-\eta+s\eta}{\mu(s+1)}+\frac{2}{s-1}b^\dagger-\eta\Big)\beta'+\Big(\frac{\eta^*}{\mu}-\frac{2a^\dagger-\eta^*+s\eta^*}{s+1}-\frac{2}{s-1}b\Big)\beta'^*+\frac{1}{\mu}\frac{s-1}{s+1}|\eta|^2+\frac{4}{s^2-1}aa^\dagger+\frac{2}{s+1}a\eta^*+\frac{2}{\mu(s+1)}a^\dagger\eta-\frac{1+\mu^2}{2\mu^2}|\eta|^2-\frac{2}{s-1}a^\dagger a-\frac{2}{s-1}b^\dagger b\Big]Ⓢ$$
$$=\frac{1}{s}\,Ⓢ\exp\Big[-\frac{1+s^2+\mu^2+s^2\mu^2+2\mu-2s^2\mu}{4s\mu^2}|\eta|^2-\frac{aa^\dagger+bb^\dagger-ab-a^\dagger b^\dagger}{s}-\frac{b^\dagger-a+b^\dagger s+as+\mu b^\dagger-\mu a-\mu as-\mu b^\dagger s}{2s\mu}\eta^*-\frac{b-sb+s\mu b+\mu b+s\mu a^\dagger-\mu a^\dagger-a^\dagger-sa^\dagger}{2s\mu}\eta\Big]Ⓢ. \tag{12.84}$$

然后就有

$$U_2(\mu)=\frac{4\mu}{1+s^2+\mu^2+s^2\mu^2+2\mu-2s^2\mu}\cdot Ⓢ\exp\Big[\frac{(2\mu^2-2)(a^\dagger b^\dagger-ab)}{s^2\mu^2-2s^2\mu+s^2+\mu^2+2\mu+1}-\frac{2s(\mu-1)^2(aa^\dagger+bb^\dagger)}{s^2\mu^2-2s^2\mu+s^2+\mu^2+2\mu+1}\Big]Ⓢ. \tag{12.85}$$

对于 $s=-1,0,1$，分别有

$$U_2(\mu)=\frac{2\mu}{\mu^2+1}\exp\Big(\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}a^\dagger b^\dagger\Big)\cdot\,:\exp\Big[-\frac{(\mu-1)^2}{\mu^2+1}(aa^\dagger+bb^\dagger)\Big]:\,\exp\Big(-\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}ab\Big)$$

$$=\frac{4\mu}{(\mu+1)^2}\,\vdots\,\exp\left[\frac{2\mu-2}{\mu+1}(a^\dagger b^\dagger-ab)\right]\vdots$$

$$=\frac{2\mu}{1+\mu^2}\exp\left(-\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}ab\right)\,\vdots\,\exp\left[\frac{(\mu-1)^2}{1+\mu^2}(aa^\dagger+bb^\dagger)\right]\vdots\,\cdot$$

$$\exp\left(\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}a^\dagger b^\dagger\right),\tag{12.86}$$

这与文献[193]的结果也是一致的.

作为双模情况最后的例子，求出$(a+b^\dagger)^m(a^\dagger+b)^n$与$\mathrm{H}_{m,n}(a+b^\dagger,a^\dagger+b)$的$s$编序形式. 利用式(12.80)与式(12.82)以及式(12.19)，式(12.25)，有

$$(a+b^\dagger)^m(a^\dagger+b)^n$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\pi}\xi^n\xi^{*m}\,|\,\xi\rangle\langle\xi\,|$$

$$=\frac{1}{s}\,Ⓢ\int\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\pi}\xi^n\xi^{*m}\exp\left[-\frac{1}{s}(\xi^*-a^\dagger-b)(\xi-b^\dagger-a)\right]Ⓢ$$

$$=(\sqrt{s})^{m+n}\,Ⓢ\int\frac{\mathrm{d}^2\xi'}{\pi}\xi'^n\xi'^{*m}\exp\left[-|\,\xi'\,|^2+\frac{a^\dagger+b}{\sqrt{s}}\xi'+\right.$$

$$\left.\frac{a+b^\dagger}{\sqrt{s}}\xi'^*-\frac{(a^\dagger+b)(a+b^\dagger)}{s}\right]Ⓢ$$

$$=(-\mathrm{i}\sqrt{s})^{m+n}\,Ⓢ\,\mathrm{H}_{m,n}\left(\mathrm{i}\,\frac{a^\dagger+b}{\sqrt{s}},\mathrm{i}\,\frac{a+b^\dagger}{\sqrt{s}}\right)Ⓢ.\tag{12.87}$$

同样地，利用式(12.80)，式(12.82)与式(12.51)以及积分公式

$$\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\exp(\zeta\,|\,z\,|^2+\xi z+\eta z^*)=-\frac{1}{\zeta}\exp\left(\frac{-\xi\eta}{\zeta}\right),\quad \mathrm{Re}\zeta<0,\tag{12.88}$$

有

$$\mathrm{H}_{m,n}(a+b^\dagger,a^\dagger+b)$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\pi}\mathrm{H}_{m,n}(\xi,\xi^*)\,|\,\xi\rangle\langle\xi\,|$$

$$=\frac{1}{s}\,Ⓢ\int\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\pi}\mathrm{H}_{m,n}(\xi,\xi^*)\exp\left[-\frac{1}{s}(\xi^*-a^\dagger-b)(\xi-b^\dagger-a)\right]Ⓢ$$

$$= \frac{1}{s} \circledS \frac{\partial^{m+n}}{\partial t^m \partial \tau^n} \int \frac{\mathrm{d}^2 \xi}{\pi} \cdot$$

$$\exp\left[ -t\tau + t\xi + \tau\xi^* - \frac{1}{s}(\xi^* - a^\dagger - b)(\xi - b^\dagger - a) \right] \Big|_{t=\tau=0} \circledS$$

$$= \circledS \frac{\partial^{m+n}}{\partial t^m \partial \tau^n} \exp[-(1-s)t\tau + (a+b^\dagger)t + (a^\dagger + b)\tau] \Big|_{t=\tau=0} \circledS$$

$$= (\sqrt{1-s})^{m+n} \circledS \, \mathrm{H}_{m,n}\left( \frac{a+b^\dagger}{\sqrt{1-s}}, \frac{a^\dagger + b}{\sqrt{1-s}} \right) \circledS. \tag{12.89}$$

## 12.4 含 $s$ 参数的 Wigner 算符的 Radon 变换

在量子断层摄影术(Tomography)理论中,人们广泛地利用Radon变换来获得 Wigner 函数分布和密度矩阵[194]. 在文献[195]中,引入量子力学的坐标-动量中介表象$|q\rangle_{\mu,\nu}$来讨论 Tomography,指出$|q\rangle_{\mu,\nu\nu,\mu}\langle q|$就是 Wigner 算符 $\Delta(x,p)$的 Radon 变换[196],即

$$| q\rangle_{\mu,\nu\nu,\mu}\langle q | = \int \mathrm{d}x\mathrm{d}p\delta(q - \mu x - \nu p)\Delta(x,p), \tag{12.90}$$

因此,对于任意态矢$|\psi\rangle$,它的 Wigner 函数的 Radon 变换就是在表象$|q\rangle_{\mu,\nu}$中测量到它的几率

$$|{}_{\nu,\mu}\langle q | \psi\rangle|^2 = \int \mathrm{d}x\mathrm{d}p\delta(q - \mu x - \nu p)W(x,p), \tag{12.91}$$

这里$|q\rangle_{\mu,\nu}$满足

$$(\mu\hat{X} + \nu\hat{P}) | q\rangle_{\mu,\nu} = q | q\rangle_{\mu,\nu}, \tag{12.92}$$

以及完备性关系

$$\int \mathrm{d}q | q\rangle_{\mu,\nu\nu,\mu}\langle q |$$

$$= [\pi(\mu^2 + \nu^2)]^{-\frac{1}{2}} \int \mathrm{d}q : \exp\left\{ -\frac{1}{\mu^2 + \nu^2}[q - (\mu\hat{X} + \nu\hat{P})]^2 \right\} :$$

$$= 1, \tag{12.93}$$

式中:$\mu,\nu$是两个独立实参数,并注意到当取 $\mu=1,\nu=0$ 和 $\mu=0$,$\nu=1$时就分别变为坐标的本征态和动量本征态. 下面,先求出

Wigner 算符 $\Delta(x,p)$的 $s$ 编序形式,然后利用 Radon 变换,再求出 $|q\rangle_{\mu,\nu\nu,\mu}\langle q|$的 $s$ 编序表达式.

### 12.4.1 $\Delta(x,p)$与$|q\rangle_{\mu,\nu\nu,\mu}\langle q|$的 $s$ 编序展开式

将 Wigner 算符 $\Delta(x,p)$ 的正规乘积形式(12.3)代入到式(12.31),就有[197]

$$\Delta(\alpha)=\frac{2}{1-s}\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\langle-\beta|\frac{1}{\pi}:\exp[-2(a^\dagger-\alpha^*)(a-\alpha)]:|\beta\rangle$$

$$Ⓢ\exp\left[\frac{2}{s-1}(s|\beta|^2-\beta^*a+\beta a^\dagger-a^\dagger a)\right]Ⓢ$$

$$=\frac{1}{s\pi}Ⓢ\exp\left[-\frac{2}{s}(a^\dagger-\alpha^*)(a-\alpha)\right]Ⓢ, \tag{12.94}$$

式中:$\alpha=\frac{x+\mathrm{i}p}{\sqrt{2}}$,已用了积分公式(12.88). 当取 $s=1,0,-1$ 时,式(12.94)分别变为

$$\Delta(\alpha)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}:\exp[-2(a^\dagger-\alpha^*)(a-\alpha)]:, & s=1\\ \frac{1}{2}\vdots\delta(a^\dagger-\alpha^*)\delta(a-\alpha)\vdots, & s=0\\ -\frac{1}{\pi}\vdots\exp[2(a^\dagger-\alpha^*)(a-\alpha)]\vdots, & s=-1\end{cases}. \tag{12.95}$$

根据式(12.94)与式(12.90),可以得到坐标-动量中介表象的 $s$ 编序式:

$$|q\rangle_{\mu,\nu\nu,\mu}\langle q|=\frac{1}{s\pi}\int\mathrm{d}x\mathrm{d}p\,\delta(q-\mu x-\nu p)\cdot$$

$$Ⓢ\exp\left[-\frac{2}{s}(a^\dagger-\alpha^*)(a-\alpha)\right]Ⓢ$$

$$=\frac{1}{s\pi}\int\mathrm{d}x\mathrm{d}p\,\delta(q-\mu x-\nu p)\cdot$$

$$Ⓢ\exp\left[-\frac{2}{s}\left(a^\dagger-\frac{x-\mathrm{i}p}{\sqrt{2}}\right)\left(a-\frac{x+\mathrm{i}p}{\sqrt{2}}\right)\right]Ⓢ$$

$$=[\pi s(\mu^2+\nu^2)]^{-\frac{1}{2}} \circledS \exp\left[-\frac{1}{s(\mu^2+\nu^2)}[q-(\mu\hat{X}+\nu\hat{P})]^2\right]\circledS, \tag{12.96}$$

当 $\mu=1,\nu=0$ 时，就是式(12.54)的结果；当 $\mu=0,\nu=1$ 时，就变成式(12.58)的结果. 从式(12.93)看出有如下完备关系

$$\int \mathrm{d}q\ |q\rangle_{\mu,\nu\nu,\mu}\langle q| = \int \mathrm{d}q[\pi s(\mu^2+\nu^2)]^{-\frac{1}{2}} \cdot \circledS \exp\left[-\frac{1}{s(\mu^2+\nu^2)}[q-(\mu\hat{X}+\nu\hat{P})]^2\right]\circledS = 1. \tag{12.97}$$

## 12.4.2 $(\mu\hat{X}+\nu\hat{P})^n$ 的 $s$ 编序展开式

利用式(12.92)与式(12.97)以及式(12.67)，就可得到 $(\mu\hat{X}+\nu\hat{P})^n$ 的 $s$ 编序展开式[198]

$$\begin{aligned}(\mu\hat{X}+\nu\hat{P})^n &= \int \mathrm{d}q q^n\ |q\rangle_{\mu,\nu\nu,\mu}\langle q| \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi s(\mu^2+\nu^2)}}\int \mathrm{d}q q^n \circledS \exp\left\{-\frac{1}{s(\mu^2+\nu^2)}[q-(\mu\hat{X}+\nu\hat{P})]^2\right\}\circledS \\ &= \left(-\mathrm{i}\sqrt{\frac{s(\mu^2+\nu^2)}{4}}\right)^n \circledS \mathrm{H}_n\left(\frac{\mathrm{i}(\mu\hat{X}+\nu\hat{P})}{\sqrt{s(\mu^2+\nu^2)}}\right)\circledS,\end{aligned} \tag{12.98}$$

此外，由于 $\hat{X}=\frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}$ 与 $\hat{P}=\frac{a-a^\dagger}{\mathrm{i}\sqrt{2}}$，可以令 $f=\frac{\mu-\mathrm{i}\nu}{\sqrt{2}}$ 与 $g=\frac{\mu+\mathrm{i}\nu}{\sqrt{2}}$，则式(12.98)等价于

$$(fa+ga^\dagger)^n = \left(-\mathrm{i}\sqrt{\frac{fgs}{2}}\right)^n \circledS \mathrm{H}_n\left(\mathrm{i}\sqrt{\frac{f}{2gs}}a+\mathrm{i}\sqrt{\frac{g}{2fs}}a^\dagger\right)\circledS, \tag{12.99}$$

这是算符 $(fa+ga^\dagger)^n$ 的 $s$ 编序展开式. 特殊地，当 $\mu=1,\nu=0$，即，

$f=g=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,变成式(12.68). 当取 $\mu=0,\nu=1$,即,$f=-g=\dfrac{1}{\mathrm{i}\sqrt{2}}$,就有

$$\hat{P}^n = \left(\frac{\sqrt{s}}{2\mathrm{i}}\right)^n \text{Ⓢ}\, \mathrm{H}_n\left(\frac{\mathrm{i}\hat{P}}{\sqrt{s}}\right)\text{Ⓢ}. \tag{12.100}$$

另一方面,当 $s=1$ 时,式(12.98)或式(12.99)就变成相应的正规乘积形式

$$\begin{aligned}(\mu\hat{X}+\nu\hat{P})^n &= \left(-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\mu^2+\nu^2}{4}}\right)^n :\mathrm{H}_n\left(\frac{\mathrm{i}(\mu\hat{X}+\nu\hat{P})}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\right): \\ &= \left(-\mathrm{i}\sqrt{\frac{fg}{2}}\right)^n :\mathrm{H}_n\left(\mathrm{i}\sqrt{\frac{f}{2g}}a+\mathrm{i}\sqrt{\frac{g}{2f}}a^\dagger\right):;\end{aligned} \tag{12.101}$$

当 $s=-1$,就变成相应的反正规乘积形式

$$(\mu\hat{X}+\nu\hat{P})^n = \left(\sqrt{\frac{fg}{2}}\right)^n \vdots\, \mathrm{H}_n\left(\sqrt{\frac{f}{2g}}a+\sqrt{\frac{g}{2f}}a^\dagger\right) \vdots\,. \tag{12.102}$$

最后,为了方便书写令 $\hat{F}=\mu\hat{X}+\nu\hat{P}$ 与 $\sigma=\mu^2+\nu^2$,从式(12.98)看出,由 $\hat{F}^n\hat{F}^m=\hat{F}^{n+m}$,有

$$\text{Ⓢ}\, \mathrm{H}_n\left(\frac{\mathrm{i}\hat{F}}{\sqrt{s\sigma}}\right)\text{ⓈⓈ}\, \mathrm{H}_m\left(\frac{\mathrm{i}\hat{F}}{\sqrt{s\sigma}}\right)\text{Ⓢ} = \text{Ⓢ}\, \mathrm{H}_{n+m}\left(\frac{\mathrm{i}\hat{F}}{\sqrt{s\sigma}}\right)\text{Ⓢ}. \tag{12.103}$$

此外,根据式(12.98),也有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{F}}\hat{F}^n = \left(-\mathrm{i}\sqrt{\frac{s\sigma}{4}}\right)^n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{F}}\text{Ⓢ}\, \mathrm{H}_n\left(\frac{\mathrm{i}\hat{F}}{\sqrt{s\sigma}}\right)\text{Ⓢ}. \tag{12.104}$$

再由 $\mathrm{H}_n'(x)=2n\mathrm{H}_{n-1}(x)$,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{F}}\hat{F}^n = n\left(-\mathrm{i}\sqrt{\frac{s\sigma}{4}}\right)^{n-1} \text{Ⓢ}\, \mathrm{H}_{n-1}\left(\frac{\mathrm{i}\hat{F}}{\sqrt{s\sigma}}\right)\text{Ⓢ}$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\mathrm{i}\sqrt{\frac{s\sigma}{4}}\right)^{n-1} \circledS\ 2n\mathrm{H}_{n-1}\left(\frac{\mathrm{i}\hat{F}}{\sqrt{s\sigma}}\right)\circledS$$

$$=\left(-\mathrm{i}\sqrt{\frac{s\sigma}{4}}\right)^{n} \circledS\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{F}}\mathrm{H}_{n}\left(\frac{\mathrm{i}\hat{F}}{\sqrt{s\sigma}}\right)\circledS. \tag{12.105}$$

比较式(12.104)与式(12.105),就有

$$\circledS\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{F}}\mathrm{H}_{n}\left(\frac{\mathrm{i}\hat{F}}{\sqrt{s\sigma}}\right)\circledS = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{F}}\circledS\ \mathrm{H}_{n}\left(\frac{\mathrm{i}\hat{F}}{\sqrt{s\sigma}}\right)\circledS. \tag{12.106}$$

### 12.4.3 $\mathrm{H}_n(\mu\hat{X}+\nu\hat{P})$的 $s$ 编序展开式

现在讨论一下 $\mathrm{H}_n(\mu\hat{X}+\nu\hat{P})$的 $s$ 编序展开式. 根据式(12.92)与式(12.97)以及式(12.62)导出

$$\begin{aligned}
&\mathrm{H}_n(\mu\hat{X}+\nu\hat{P})\\
&=\int\mathrm{d}q\mathrm{H}_n(q)\ |\ q\rangle_{\mu,\nu\nu,\mu}\langle q\ |\\
&=[\pi s(\mu^2+\nu^2)]^{-\frac{1}{2}}\int\mathrm{d}q\mathrm{H}_n(q)\ \cdot\\
&\quad\circledS\ \exp\left\{-\frac{1}{s(\mu^2+\nu^2)}[q-(\mu\hat{X}+\nu\hat{P})]^2\right\}\circledS\\
&=\left(\sqrt{1-s(\mu^2+\nu^2)}\right)^n\circledS\ \mathrm{H}_n\left(\frac{\mu\hat{X}+\nu\hat{P}}{\sqrt{1-s(\mu^2+\nu^2)}}\right)\circledS,
\end{aligned} \tag{12.107}$$

也有

$$H_n(fa+ga^{\dagger}) = \left(\sqrt{1-2fgs}\right)^n\circledS\ \mathrm{H}_n\left(\frac{fa+ga^{\dagger}}{\sqrt{1-2fgs}}\right)\circledS. \tag{12.108}$$

对于特殊情况 $s=1,0,-1$,有

$$\mathrm{H}_n(\mu\hat{X}+\nu\hat{P})$$

$$
=\begin{cases}
(\sqrt{1+\mu^2+\nu^2})^n : \mathrm{H}_n\left(\dfrac{(\mu\hat{X}+\nu\hat{P})}{\sqrt{1-(\mu^2+\nu^2)}}\right):, & s=1 \\
\vdots\, \mathrm{H}_n(\mu\hat{X}+\nu\hat{P})\, \vdots, & s=0 \\
(\sqrt{1+\mu^2+\nu^2})^n \vdots\, \mathrm{H}_n\left(\dfrac{(\mu\hat{X}+\nu\hat{P})}{\sqrt{1+(\mu^2+\nu^2)}}\right) \vdots, & s=-1
\end{cases}
\tag{12.109}
$$

## 12.5 压缩混沌光场的 Weyl 对应与 $P$ 表示

本节,采用式(12.31)可得到一些量子密度算符的 $P$ 表示与 Weyl 对应. 以压缩混沌光场为例,其定义为[199]

$$\rho_s = S(r)\rho_c S^{-1}(r), \tag{12.110}$$

这里 $S(r)=\exp[\mathrm{i}r(\hat{X}\hat{P}+\hat{P}\hat{X})/2]$是压缩算符,$\rho_c=(1-\mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{kT}})\cdot\exp\left(-\frac{\hbar\omega a^\dagger a}{kT}\right)$表示热场的密度算符($k$ 是玻耳兹曼常数,$T$ 为温度),$\mathrm{tr}\rho_c=1$. 在文献[200]中,利用 IWOP 技术可以将 $\rho_c$ 变成它的正规乘积 Gauss 形式

$$\rho_s = 2\sqrt{f'g'} : \exp(-f'\hat{X}^2-g'\hat{P}^2) :, \tag{12.111}$$

式中:

$$
\begin{aligned}
f' &\equiv \frac{1}{(2\bar{n}+1)\mathrm{e}^{2r}+1}, \\
g' &\equiv \frac{1}{(2\bar{n}+1)\mathrm{e}^{-2r}+1},
\end{aligned}
\tag{12.112}
$$

$\bar{n}$ 表示 $\rho_c$ 中平均光子数,即 $\bar{n}=\mathrm{tr}(\rho_c a^\dagger a)=(\mathrm{e}^{\hbar\omega/kT}-1)^{-1}$. 将式(12.111)代入式(12.31)并利用

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}\exp(\zeta|z|^2+\xi z+\eta z^*+fz^2+gz^{*2}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\zeta^2-4fg}}\exp\left(\frac{-\zeta\xi\eta+\xi^2 g+\eta^2 f}{\zeta^2-4fg}\right),
\end{aligned}
\tag{12.113}
$$

就有

$$\rho_s = \frac{4\sqrt{fg}}{1-s}\int \frac{d^2\beta}{\pi}\exp\left[-f\left(\frac{\beta-\beta^*}{\sqrt{2}}\right)^2 - g\left(\frac{\beta+\beta^*}{i\sqrt{2}}\right)^2\right]\cdot$$

$$Ⓢ \exp\left(\frac{-2}{1-s}|\beta|^2 - \frac{2a}{s-1}\beta^* + \frac{2a^\dagger}{s-1}\beta - \frac{2}{s-1}a^\dagger a\right)Ⓢ$$

$$= \frac{2}{1-s}\sqrt{\frac{(s-1)^2 fg}{G_s}}\cdot$$

$$Ⓢ \exp\left[-\frac{(f+g-2fg+2fgs)a^\dagger a}{G_s} + \frac{(g-f)(a^{\dagger 2}+a^2)}{2G_s}\right]Ⓢ, \tag{12.114}$$

其中：$G_s \equiv (fs-f+1)(gs-g+1)$. 作为特殊的情况，即当取 $s=0$，它就变为 Weyl 编序形式

$$\rho_s = 2\sqrt{\frac{fg}{(1-f)(1-g)}}\cdot$$

$$\vdots \exp\left[\frac{(g-f)(a^{\dagger 2}+a^2) - 2(f+g-2fg)a^\dagger a}{2(1-f)(1-g)}\right]\vdots. \tag{12.115}$$

因此，$\rho_s$ 的 Weyl 对应为

$$\rho_s \to 2\sqrt{\frac{fg}{(1-f)(1-g)}}\cdot$$

$$\exp\left[\frac{(g-f)(\alpha^{*2}+\alpha^2) - 2(f+g-2fg)|\alpha|^2}{2(1-f)(1-g)}\right]. \tag{12.116}$$

根据 Wigner 理论，对于给定态 $|\psi\rangle$，有

$$\langle\psi|\rho_s|\psi\rangle$$

$$= 4\sqrt{\frac{fg}{(1-f)(1-g)}}\int d^2\alpha\cdot$$

$$\exp\left[\frac{(g-f)(\alpha^{*2}+\alpha^2) - 2(f+g-2fg)|\alpha|^2}{2(1-f)(1-g)}\right]W_\psi(\alpha^*,\alpha), \tag{12.117}$$

式中：$W_\psi(\alpha^*,\alpha)$就是$|\psi\rangle$的 Wigner 函数.

另一方面，当 $s=-1$，式(12.114)变为它的反正规乘积形式

$$\rho_s=2\sqrt{\frac{fg}{(1-2f)(1-2g)}}\cdot \vdots\exp\left[\frac{(g-f)(a^{\dagger 2}+a^2)-2(f+g-4fg)a^\dagger a}{2(1-2f)(1-2g)}\right]\vdots, \tag{12.118}$$

因此，易得 $\rho_s$ 的 $P$ 表示为

$$P(\alpha^*,\alpha)=2\sqrt{\frac{fg}{(1-2f)(1-2g)}}\cdot \exp\left[\frac{(g-f)(\alpha^{*2}+\alpha^2)-2(f+g-4fg)|\alpha|^2}{2(1-2f)(1-2g)}\right]. \tag{12.119}$$

# 第 13 章　量子光学中光子计数的新公式

在量子光学中光子计数是一个重要课题，这是因为用它能够判断光场的非经典特性[201,202]. 量子力学中光子计数分布首先由 Kelley 和 Kleiner 提出[203]. 对于单模光场，在时间间隔 $T$ 内检测到 $m$ 个光子的几率 $p(m,T)$ 可表示为[204,205]

$$p(m,T) = \mathrm{tr}\left[\rho :\frac{(\xi a^{\dagger} a)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\xi a^{\dagger} a} :\right], \qquad (13.1)$$

这里 $\rho$ 是待测单模场的密度算符，$\xi$ 被称为检测器的量子检测效率. Mogilevtsev 组[206]也讨论无光子探测，即讨论了式(13.1)中 $m=0$ 的情况. 最近范洪义等人[207]推导出两个新的光子计数公式，其中一个与密度算符在相干态下的平均有关，另一个与密度算符的 Wigner 函数有关.

例如，当 $\rho=|\alpha\rangle\langle\alpha|$ 是一个纯相干态，$|\alpha\rangle=\exp(\alpha a^{\dagger}-\alpha^{*} a)|0\rangle\equiv D(\alpha)|0\rangle$，以及 $a|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle$，则光子计数分布为

$$\langle\alpha| :\frac{(\xi a^{\dagger} a)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\xi a^{\dagger} a} : |\alpha\rangle = \frac{(\xi|\alpha|^2)^m \mathrm{e}^{-\xi|\alpha|^2}}{m!}, \qquad (13.2)$$

这正是 Poisson 分布. 根据算符等式 $\mathrm{e}^{\lambda a^{\dagger} a} = :\exp[(\mathrm{e}^{\lambda}-1)a^{\dagger} a]:$ 与

$$\mathrm{e}^{a^{\dagger} a \ln(1-\xi)} a^m \mathrm{e}^{-a^{\dagger} a \ln(1-\xi)} = a^m (1-\xi)^{-m}, \qquad (13.3)$$

以及

$$a^{\dagger m} a^m = \hat{N}(\hat{N}-1)\cdots(\hat{N}-m+1), \quad \hat{N} = a^{\dagger} a, \qquad (13.4)$$

能够导出

$$\frac{\xi^m}{m!} :(a^{\dagger} a)^m \mathrm{e}^{-\xi a^{\dagger} a} := \frac{\xi^m}{m!} a^{\dagger m} a^m (1-\xi)^{-m} \mathrm{e}^{a^{\dagger} a \ln(1-\xi)}$$

$$=\frac{\xi^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}\mid n\rangle\langle n\mid \hat{N}(\hat{N}-1)\cdots(\hat{N}-m+1)(1-\xi)^{-m}\mathrm{e}^{a^{\dagger}a\ln(1-\xi)}$$

$$=\frac{\xi^m}{m!}\sum_{n=m}^{\infty}\mid n\rangle\langle n\mid n(n-1)\cdots(n-m+1)(1-\xi)^{n-m}$$

$$=\sum_{n=m}^{\infty}\binom{n}{m}\xi^m(1-\xi)^{n-m}\mid n\rangle\langle n\mid, \tag{13.5}$$

式中：$|n\rangle=\frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle$为粒子数态．将式(13.5)代入式(13.1)有

$$p_{|n\rangle}(m,T)=\sum_{n=m}^{\infty}P_n\binom{n}{m}\xi^m(1-\xi)^{n-m}, \tag{13.6}$$

其中：$P_n=\langle n|\rho|n\rangle$．式(13.6)被称为 Fock 空间中 Bernoulli 分布[204,205]．

对于许多不同于纯相干态的密度算符，若直接使用式(13.1)是非常困难的且不方便．为了克服这种困难，本章将改进公式(13.1)，导出一个新光子计数公式，它与密度算符的 $P$ 函数有关[208]；另外，根据上一章 IWSOP 技术导出带 $s$ 参数的光子计数公式的一个普遍形式[209]，当 $s$ 取不同值时，对应不同的相空间分布函数．

## 13.1　密度算符 $P$ 表示下的光子计数公式

现在将密度算符 $\rho$ 的 $P$ 表示（$|\alpha\rangle$为相干态）

$$\rho=\int\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}P(\alpha)\mid\alpha\rangle\langle\alpha\mid \tag{13.7}$$

代入式(13.1)中，有

$$p(m,T)=\int\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}P(\alpha)\langle\alpha\mid:\frac{(\xi a^{\dagger}a)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\xi a^{\dagger}a}:\mid\alpha\rangle$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi}P(\alpha)\frac{(\xi\mid\alpha\mid^2)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\xi|\alpha|^2}. \tag{13.8}$$

再用 $P(\alpha)$的表达式[34]

$$P(\alpha) = \mathrm{e}^{|\alpha|^2}\int \frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\langle -\beta \mid \rho \mid \beta\rangle \exp(\mid \beta\mid^2 + \alpha\beta^* - \beta\alpha^*), \tag{13.9}$$

式中：$|\beta\rangle$也是一个相干态，于是式(13.8)就变成

$$\begin{aligned} & p(m,T) \\ &= \frac{\xi^m}{m!}\int \frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\mathrm{e}^{|\beta|^2}\langle -\beta \mid \rho \mid \beta\rangle \int \frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\pi} \mid \alpha \mid^{2m} \cdot \\ &\quad \exp[(1-\xi) \mid \alpha\mid^2 + \alpha\beta^* - \beta\alpha^*] \\ &= \frac{\xi^m}{(\xi-1)^{m+1}}\int \frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\langle -\beta \mid \rho \mid \beta\rangle \exp\left(\frac{\xi-2}{\xi-1} \mid \beta \mid^2\right) \mathrm{L}_m\left(\frac{\mid\beta\mid^2}{\xi-1}\right), \end{aligned} \tag{13.10}$$

其中：$\mathrm{L}_m(x)$是 Laguerre 多项式

$$\mathrm{L}_m(x) = \sum_{l=0}^{m}(-1)^l\binom{m}{l}\frac{x^l}{l!} = \sum_{l'=0}^{m}(-1)^{m-l'}\binom{m}{m-l'}\frac{x^{m-l'}}{(m-l')!}, \tag{13.11}$$

并用了数学积分公式

$$\begin{aligned} &\int \frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} z^n z^{*m} \exp(\varepsilon \mid z\mid^2 + Bz + Cz^*) \\ &= \mathrm{e}^{-BC/\varepsilon}\sum_{l=0}^{\min[m,n]}\frac{n!m!B^{m-l}C^{n-l}}{l!(n-l)!(m-l)!(-\varepsilon)^{n+m-l+1}}, \quad \mathrm{Re}\,\varepsilon < 0, \end{aligned} \tag{13.12}$$

式(13.10)就是一个新的光子计数公式，其不同于文献[207]中的公式.

举一些例子说明，将纯相干态 $\rho = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ 代入式(13.10)，并考虑$\langle\alpha|\beta\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2)+\alpha^*\beta\right]$，有

$$\begin{aligned} & p_{|\alpha\rangle\langle\alpha|}(m,T) \\ &= \frac{\xi^m}{(\xi-1)^{m+1}}\int \frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\langle -\beta \mid \alpha\rangle\langle\alpha \mid \beta\rangle \exp\left(\frac{\xi-2}{\xi-1} \mid\beta\mid^2\right)\mathrm{L}_m\left(\frac{\mid\beta\mid^2}{\xi-1}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{\xi^m e^{-|\alpha|^2}}{(\xi-1)^{m+1}} \int \frac{d^2\beta}{\pi} \exp\left(\frac{-|\beta|^2}{\xi-1} + \beta\alpha^* - \alpha\beta^*\right) L_m\left(\frac{|\beta|^2}{\xi-1}\right). \tag{13.13}$$

根据 Laguerre 多项式的产生函数[210]

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n = (1-t)^{-1} \exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right), \tag{13.14}$$

或

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[(1-t)^{-1} \exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right)\right]\Bigg|_{t=0}, \tag{13.15}$$

式(13.13)可改写为

$$\begin{aligned} p_{|\alpha\rangle\langle\alpha|}(m,T) &= \frac{\xi^m e^{-|\alpha|^2}}{m!(\xi-1)^{m+1}} \frac{\partial^m}{\partial t^m} \int \frac{d^2\beta}{(1-t)\pi} \cdot \\ &\quad \exp\left[\frac{1}{(\xi-1)(t-1)} |\beta|^2 + \alpha^*\beta - \alpha\beta^*\right]\Bigg|_{t=0} \\ &= \frac{\xi^m e^{-\xi|\alpha|^2}}{m!(\xi-1)^m} \frac{\partial^m}{\partial t^m} \exp\left[t(\xi-1)|\alpha|^2\right]\Bigg|_{t=0} \\ &= \frac{\xi^m |\alpha|^{2m} e^{-\xi|\alpha|^2}}{m!}, \end{aligned} \tag{13.16}$$

这里用了积分公式

$$\int \frac{d^2 z}{\pi} \exp(\epsilon |z|^2 + Bz + Cz^*) = -\frac{\exp(-BC/\epsilon)}{\epsilon}, \quad \mathrm{Re}\,\epsilon < 0. \tag{13.17}$$

很显然,式(13.16)的结果完全与式(13.2)一样. 联合式(13.13)与式(13.16)得到一个新的积公公式

$$\int \frac{d^2\beta}{\pi} L_m\left(\frac{|\beta|^2}{\xi-1}\right) \exp\left(\frac{-|\beta|^2}{\xi-1} + \beta\alpha^* - \alpha\beta^*\right) = \frac{(\xi-1)^{m+1} |\alpha|^{2m}}{m!} e^{(1-\xi)|\alpha|^2}. \tag{13.18}$$

特别地,当取 $\alpha=0$,在式(13.18)中仅有 $m=0$ 项存在,则

$$\int \frac{d^2\beta}{\pi} e^{-|\beta|^2} L_0(|\beta|^2) = 1. \tag{13.19}$$

现在考虑另一密度算符

$$\rho_c = (1 - e^{-f}) e^{-f a^\dagger a}, \tag{13.20}$$

式中：$f = \dfrac{\omega\hbar}{kT}$，它表示一个被筛选过的单模混沌光场. 根据

$$(1 - e^{-f}) \langle -\beta | : e^{(e^{-f}-1)a^\dagger a} : | \beta \rangle = (1 - e^{-f}) e^{-(1+e^{-f})|\beta|^2}, \tag{13.21}$$

将上式代入式(13.10)，导出

$$\begin{aligned} p_c(m,T) &= \frac{\xi^m (1 - e^{-f})}{(\xi - 1)^{m+1}} \int \frac{d^2\beta}{\pi} L_m\left(\frac{|\beta|^2}{\xi - 1}\right) \exp\left[-\left(1 + e^{-f} - \frac{\xi - 2}{\xi - 1}\right)|\beta|^2\right] \\ &= (1 - e^{-f}) \left(\frac{\xi}{\xi - 1}\right)^m \int_0^\infty dr L_m(r) e^{-(1+\xi e^{-f} - e^{-f})r}. \end{aligned} \tag{13.22}$$

根据积分公式[210]

$$\int_0^\infty dr L_m(r) e^{-gr} = \frac{(g-1)^m}{g^{m+1}}, \tag{13.23}$$

式(13.39)的结果为

$$p_c(m,T) = \frac{(e^f - 1)\xi^m}{(e^f + \xi - 1)^{m+1}}. \tag{13.24}$$

注意到$(e^f - 1)^{-1} = \left[\exp\left(\dfrac{\omega\hbar}{kT}\right) - 1\right]^{-1} \equiv \bar{n}$ 代表 Bose-Einstein 统计，式(13.40)变成为

$$p_c(m,T) = \frac{(\xi\bar{n})^m}{(1 + \xi\bar{n})^{m+1}}, \tag{13.25}$$

该结果与已往知道的是一样的，即我们方法的正确性得到证实.

当 $\rho_s$ 是一个纯压缩真空态

$$\rho_s = \operatorname{sech}\lambda \exp\left(\frac{\tanh\lambda}{2} a^{\dagger 2}\right) | 0 \rangle \langle 0 | \exp\left(\frac{\tanh\lambda}{2} a^2\right), \tag{13.26}$$

式中：$\lambda$ 为压缩参数，将 $\rho_s$ 代入式(13.10)就得到

$$p_s(m,T) = \frac{\xi^m}{(\xi-1)^{m+1}}\text{sech}\lambda\int\frac{d^2\beta}{\pi}\cdot$$

$$\exp\left[-\frac{|\beta|^2}{\xi-1}+(\beta^{*2}+\beta^2)\frac{\tanh\lambda}{2}\right]L_m\left(\frac{|\beta|^2}{\xi-1}\right). \tag{13.27}$$

然后利用式(13.15)与积分公式

$$\int\frac{d^2z}{\pi}\exp(\zeta|z|^2+\xi z+\eta z^*+fz^2+gz^{*2})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\zeta^2-4fg}}\exp\left[\frac{-\zeta\xi\eta+\xi^2g+\eta^2f}{\zeta^2-4fg}\right], \tag{13.28}$$

其要求 $\text{Re}(\zeta+f+g)<0,\text{Re}\left(\frac{\zeta^2-4fg}{\zeta+f+g}\right)<0$ 或者 $\text{Re}(\zeta-f-g)<0,\text{Re}\left(\frac{\zeta^2-4fg}{\zeta-f-g}\right)<0$，得到

$$p_s(m,T) = \frac{\xi^m\text{sech}\lambda}{m!(\xi-1)^{m+1}}\frac{\partial^m}{\partial t^m}\int\frac{d^2\beta}{(1-t)\pi}\cdot$$

$$\exp\left[(\beta^{*2}+\beta^2)\tanh\lambda/2-\frac{1}{(\xi-1)(1-t)}|\beta|^2\right]\Bigg|_{t=0}$$

$$=\frac{\xi^m\text{sech}\lambda}{m!(\xi-1)^m}\frac{\partial^m}{\partial t^m}\frac{1}{\sqrt{1-(1-t)^2G^2}}\Bigg|_{t=0}, \tag{13.29}$$

式中：

$$G^2\equiv(\xi-1)^2\tanh^2\lambda. \tag{13.30}$$

再根据 Legendre(勒让德)多项式的产生函数[210]

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n \tag{13.31}$$

或

$$P_n(x)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}\Bigg|_{t=0}, \tag{13.32}$$

最后导出

$$p_s(m,T)=\frac{\xi^m\text{sech}\lambda\tanh^m\lambda}{(1-G^2)^{1/2}(G^2-1)^{m/2}}P_m\left(\frac{G}{\sqrt{G^2-1}}\right), \tag{13.33}$$

压缩真空态的光子计数与 Legendre 函数相关，是一个新的结果.

最后一个例子，当 $\rho_d$ 是一个平移混沌光场

$$\rho_d = (1-\mathrm{e}^{-f})D(\alpha)\mathrm{e}^{-fa^\dagger a}D^{-1}(\alpha), \tag{13.34}$$

其中：$D(\alpha)=\exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)$ 为平移算符，利用它的正规乘积形式为[211]

$$\rho_d = \frac{1}{\bar{n}+1} : \exp\left[\frac{-(\alpha-a)(\alpha^*-a^\dagger)}{\bar{n}+1}\right]: \tag{13.35}$$

并代入式(13.10)，就有

$$\begin{aligned}
&p_d(m,T)\\
&= \frac{\xi^m \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{\bar{n}+1}\right)}{m!(\bar{n}+1)(\xi-1)^{m+1}} \frac{\partial^m}{\partial t^m}\int \frac{\mathrm{d}^2\beta}{(1-t)\pi} \cdot \\
&\quad \exp\left[\frac{\bar{n}\xi+\bar{n}t-\bar{n}t\xi+1}{(\xi-1)(\bar{n}+1)(t-1)}|\beta|^2 + \frac{\alpha^*}{\bar{n}+1}\beta - \frac{\alpha}{\bar{n}+1}\beta^*\right]\Bigg|_{t=0}\\
&= \frac{\xi^m \exp\left(-\frac{\xi|\alpha|^2}{1+n\xi}\right)}{m!(\xi-1)^m} \frac{\partial^m}{\partial t^m} \frac{\frac{1}{\bar{n}\xi+1}}{1-\frac{\bar{n}(\xi-1)}{\bar{n}\xi+1}t} \cdot \\
&\quad \exp\left[\frac{\frac{\xi-1}{(n\xi+1)^2}|\alpha|^2 t}{1-\frac{\bar{n}(\xi-1)}{\bar{n}\xi+1}t}\right]\Bigg|_{t=0}\\
&= \frac{(\bar{n}\xi)^m \exp\left(-\frac{\xi|\alpha|^2}{1+n\xi}\right)}{(\bar{n}\xi+1)^{m+1}} \mathrm{L}_m\left[\frac{-|\alpha|^2}{\bar{n}(n\xi+1)}\right],
\end{aligned} \tag{13.36}$$

这里已考虑了式(13.15)和式(13.17). 有趣的是当 $\xi=1,\bar{n}=-1/2$，式(13.35)中的 $\rho_d$ 变成为 $\rho_d=2:\exp[-2(\alpha-a)(\alpha^*-a^\dagger)]:=2\pi\Delta(\alpha)$，这里 $\Delta(\alpha)$就是 Wigner 算符. 然后用 $:\mathrm{e}^{-a^\dagger a}:=|0\rangle\langle 0|$ 与 $|m\rangle = \frac{a^{\dagger m}}{\sqrt{m!}}|0\rangle$，有

$$\begin{aligned}
p_d(m,T) &= 2\pi\langle m|\Delta(\alpha)|m\rangle = 2(-1)^m \mathrm{e}^{-2|\alpha|^2}\mathrm{L}_m[4|\alpha|^2]\\
&\equiv 2\pi W(\alpha),
\end{aligned} \tag{13.37}$$

式中：$W(\alpha)$正是粒子数态$|m\rangle$的 Wigner 函数[36]，这也很好地验证了式(13.36)结果的正确性.

## 13.2 带 $s$ 参数的光子计数公式

首先，根据第 12 章中 IWSOP 理论，计算出式(13.1)中算符$:(a^\dagger a)^m e^{-\xi a^\dagger a}:$的 $s$ 编序展开式. 根据任意密度算符的 $s$ 编序展开公式(12.31)与$\langle -\beta|\beta\rangle = e^{-2|\beta|^2}$以及 IWSOP 技术积分，得

$$
\begin{aligned}
&:(a^\dagger a)^m e^{-\xi a^\dagger a}: \\
&= \frac{2}{1-s}\int \frac{d^2\beta}{\pi}\langle -\beta|:(a^\dagger a)^m e^{-\xi a^\dagger a}:|\beta\rangle \\
&\quad Ⓢ \exp\left[\frac{2}{s-1}(s|\beta|^2 - \beta^* a + \beta a^\dagger - a^\dagger a)\right]Ⓢ \\
&= \frac{2(-1)^m}{1-s}\int \frac{d^2\beta}{\pi}|\beta|^{2m} Ⓢ \exp\left[\frac{\xi(s-1)+2}{s-1}|\beta|^2 + \frac{2a^\dagger}{s-1}\beta - \right. \\
&\quad \left. \frac{2a}{s-1}\beta^* - \frac{2a^\dagger a}{s-1}\right]Ⓢ \\
&= \frac{2(s-1)^m}{(s\xi-\xi+2)^{m+1}} Ⓢ \exp\left(-\frac{2\xi a^\dagger a}{s\xi-\xi+2}\right)\sum_{l=0}^{m}\frac{(m!)^2}{l![(m-l)!]^2} \\
&\quad \left[\frac{4a^\dagger a}{(s-1)(s\xi-\xi+2)}\right]^{m-l} Ⓢ,
\end{aligned} \tag{13.38}
$$

其中：用了积分公式(13.12)再比较式(13.11)，式(13.38)变为

$$
\begin{aligned}
:(a^\dagger a)^m e^{-\xi a^\dagger a}: &= \frac{2(s-1)^m m!}{(s\xi-\xi+2)^{m+1}} Ⓢ \exp\left(-\frac{2\xi a^\dagger a}{s\xi-\xi+2}\right)\cdot \\
&\qquad L_m\left[\frac{4a^\dagger a}{(1-s)(s\xi-\xi+2)}\right]Ⓢ,
\end{aligned} \tag{13.39}
$$

这是一个新的算符公式. 再由 $s$ 广义经典-量子对应式(12.10)，可得Ⓢ $\exp\left(-\frac{2\xi a^\dagger a}{s\xi-\xi+2}\right) L_m\left[\frac{4a^\dagger a}{(1-s)(s\xi-\xi+2)}\right]$Ⓢ的经典对应函数

$$Ⓢ \exp\left(-\frac{2\xi a^{\dagger} a}{s\xi-\xi+2}\right) \mathrm{L}_m\left[\frac{4 a^{\dagger} a}{(1-s)(s\xi-\xi+2)}\right] Ⓢ$$

$$=2 \int \mathrm{d}^2 \alpha \Delta_s(\alpha) \exp\left(-\frac{2\xi|\alpha|^2}{s\xi-\xi+2}\right) \mathrm{L}_m\left[\frac{4|\alpha|^2}{(1-s)(s\xi-\xi+2)}\right]. \tag{13.40}$$

利用式(13.1),式(13.39)与式(13.40),可以得到

$$\begin{aligned} p(m, T) &= \operatorname{tr}\left[\rho : \frac{(\xi a^{\dagger} a)^m}{m!} \mathrm{e}^{-\xi a^{\dagger} a} :\right] \\ &= \frac{2(s-1)^m \xi^m}{(s\xi-\xi+2)^{m+1}} \int \frac{\mathrm{d}^2 \alpha}{\pi} W_s(\alpha) \exp\left(-\frac{2\xi|\alpha|^2}{s\xi-\xi+2}\right) \cdot \\ &\quad \mathrm{L}_m\left[\frac{4|\alpha|^2}{(1-s)(s\xi-\xi+2)}\right], \end{aligned} \tag{13.41}$$

式中:$W_s(\alpha)=2\pi \operatorname{tr}[\rho \Delta_s(\alpha)]$是带 $s$ 参数 Wigner 函数. 式(13.41)就是一个带 $s$ 参数的新光子计数公式,一旦知道了密度算符 $\rho$ 的 Wigner 函数,就可以用这个公式来求解.

特殊情况,当 $s=-1$ 时,有

$$\begin{aligned} W_s(\alpha) \rightarrow W_{s=-1}(\alpha) &= 2\pi \operatorname{tr}[\rho \Delta_s(\alpha)] = 2\pi \operatorname{tr}[\rho|\alpha\rangle\langle\alpha|] \\ &= 2\pi\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle, \end{aligned} \tag{13.42}$$

那么式(13.42)变为

$$\begin{aligned} p(m, T) &= \frac{2(-\xi)^m}{(1-\xi)^{m+1}} \int \mathrm{d}^2 \alpha\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle \exp\left(-\frac{\xi|\alpha|^2}{1-\xi}\right) \mathrm{L}_m\left(\frac{|\alpha|^2}{1-\xi}\right) \\ &= \frac{2\xi^m}{(\xi-1)^m} \int \mathrm{d}^2 \alpha\langle\sqrt{1-\xi} \alpha|\rho| \sqrt{1-\xi} \alpha\rangle \mathrm{e}^{-\xi|\alpha|^2} \mathrm{L}_m(|\alpha|^2). \end{aligned} \tag{13.43}$$

可以看出,一旦密度算符在相干态$|\sqrt{1-\xi}\alpha\rangle$下的平均值$\langle\sqrt{1-\xi}\alpha|\rho|\sqrt{1-\xi}\alpha\rangle$($Q$ 函数)已知,光子计数分布就能求出. 该公式正是文献[207]中式(9).

另一方面,当 $s=0$,$\Delta_s(\alpha)$变成通常的 Wigner 算符 $\Delta(\alpha) \equiv \frac{1}{\pi} : \exp[-2(a^{\dagger}-\alpha^*)(a-\alpha)] :$,则

$$W_s(\alpha) \to W_{s=0}(\alpha) = 2\pi \mathrm{tr}[\rho\Delta(\alpha)] \equiv W(\alpha), \quad (13.44)$$

所以，式(13.41)成为

$$p(m,T) = \frac{2(-\xi)^m}{(2-\xi)^{m+1}} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} W(\alpha) \exp\left(\frac{2\xi |\alpha|^2}{\xi - 2}\right) L_m\left(\frac{4|\alpha|^2}{2-\xi}\right), \quad (13.45)$$

这与密度算符的 Wigner 函数有关，完全与文献[207]中式(24)是一致的. 对于无光子计数，即 $m=0$，式(13.41)变为

$$p(T) = \frac{2}{s\xi - \xi + 2} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} W_s(\alpha) \exp\left(-\frac{2\xi |\alpha|^2}{s\xi - \xi + 2}\right). \quad (13.46)$$

# 第 14 章　费米系统的 IWSOP 技术及其应用

第 12 章中用到的 IWSOP 技术是针对玻色算符的. 而费米系统的算符理论对于固体物理,量子统计的发展也都十分重要[212,213]. 我们有必要将 IWSOP 技术从玻色系统推广到费米系统. 为此,可以从费米系统中带 $s$ 参数的 Wigner 算符出发,给出费米系统的 IWSOP 技术,并给出费米系统密度矩阵的 $s$ 编序展开公式,当 s=1,0,−1 时,就变为相应的费米算符的正规乘积、Weyl 编序以及反正规乘积形式.

## 14.1　费米系统的相干态与 IWOP 技术

记费米子产生算符$f_i^\dagger$和湮灭算符 $f_j$,它们满足费米子反对易关系

$$\{f_i, f_j\} = 0, \quad \{f_i, f_j^\dagger\} = \delta_{ij} \tag{14.1}$$

令$|0\rangle_i$ 是费米子真空态,它满足

$$\begin{aligned} &f_i \mid 0\rangle_i = 0, \quad f_i^\dagger \mid 0\rangle_i = \mid 1\rangle_i, \quad f_i^\dagger \mid 1\rangle_i = 0, \\ &\mid 0\rangle_{ii}\langle 0 \mid + \mid 1\rangle_{ii}\langle 1 \mid = 1. \end{aligned} \tag{14.2}$$

利用$|0\rangle_i$ 和$|1\rangle_i$ 的矩阵表示

$$\mid 0\rangle_i = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \mid 1\rangle_i = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \tag{14.3}$$

可知

$$f_i = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \quad f_i^\dagger = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \tag{14.4}$$

归一化的费米子相干态为[214]

$$|\alpha_i\rangle = \exp(f_i^\dagger\alpha_i - \bar{\alpha}_i f_i)|0\rangle_i = \exp\left(-\frac{1}{2}\bar{\alpha}_i\alpha_i + f_i^\dagger\alpha_i\right)|0\rangle_i,$$

$$\langle\alpha_i| = {}_i\langle 0|\exp\left(-\frac{1}{2}\bar{\alpha}_i\alpha_i + \bar{\alpha}_i f_i\right), \tag{14.5}$$

这样可以看$|\alpha_i\rangle$是湮灭算符的本征态，即

$$f_i|\alpha_i\rangle = \left[f_j, \exp\left(-\frac{1}{2}\bar{\alpha}_i\alpha_i + f_i^\dagger\alpha_i\right)\right]|0\rangle_i = \alpha_i|\alpha_i\rangle. \tag{14.6}$$

费米子相干态的内积关系

$$\langle\beta_i|\alpha_i\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}\bar{\beta}_i\beta_i - \frac{1}{2}\bar{\alpha}_i\alpha_i + \bar{\beta}_i\alpha_i\right). \tag{14.7}$$

$|\alpha_i\rangle$在 Fock 空间中的展开是

$$|\alpha_i\rangle = (|0\rangle + |1\rangle\alpha_i)e^{-\frac{1}{2}\bar{\alpha}_i\alpha_i}. \tag{14.8}$$

这里：$\alpha_i$ 与 $\bar{\alpha}_i$ 都是 Grassmann 数，满足反对易 $c$ 数的规则与 Berezin 积分规则[215]

$$\alpha_i^2 = 0,\quad \{\alpha_i, \alpha_j\} = 0,\quad \{\alpha_i, f_j\} = 0,\quad \{\alpha_i, f_j^\dagger\} = 0,$$

$$\int d\alpha_i = \int d\bar{\alpha}_i = 0,\quad \int d\alpha_i\alpha_i = \int d\bar{\alpha}_i\bar{\alpha}_i = 1, \tag{14.9}$$

注意 Grassmann 数与费米子算符是反对易的，字母上的标记"—"是对 Grassmann 的数复共轭操作. 经常用到的一个 Berezin 积分公式为[216]

$$\int\prod_i d\bar{\alpha}_i d\alpha_i \exp[-\bar{\alpha}_i A_{ij}\alpha_j + \bar{\alpha}_i\eta_i + \bar{\eta}_i\alpha_i] = \det\boldsymbol{A}\exp[\bar{\eta}_i(\boldsymbol{A}^{-1})_{ij}\eta_j] \tag{14.10}$$

其中：$\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times n$ 的复矩阵，$\eta_i$，$\bar{\eta}_i$ 也是 Grassmann 数.

现在我们概括出费米系统（费米算符与 Grassmann 数）IWOP 技术[11,217]，包括正规乘积（以：：标记），反正规乘积（以⋮ ⋮标记），Weyl 编序（以⁝ ⁝标记）内积分技术. 下面给出费米算符的正规乘积具有以下性质：

(1) 在正规乘积记号：：内，任何两个费米算符是反对易的，

即它们具有 Grassmann 数的性质.

(2) 费米子真空投影算符$|0\rangle\langle 0|$的正规乘积形式是

$$|0\rangle\langle 0| = :\mathrm{e}^{-f^{\dagger}f}:. \tag{14.11}$$

事实上,由 Pauli 原理$|0\rangle\langle 0|+|1\rangle\langle 1|=1$ 以及 $f=|0\rangle\langle 1|$, $f^{\dagger}=|1\rangle\langle 0|$,可见

$$|0\rangle\langle 0| = 1-|1\rangle\langle 1| = 1-f^{\dagger}f = :\mathrm{e}^{-f^{\dagger}f}:. \tag{14.12}$$

(3) 一个"Grassmann 数-费米算符对"(GFOP),如 $\alpha_1 f_1$,与另一个 GFOP,如 $\alpha_2 f_2$,在 : : 内对易,即

$$:\alpha_1 f_1 \alpha_2 f_2: = :\alpha_2 f_2 \alpha_1 f_1:. \tag{14.13}$$

(4) 可以对 : : 内部的非算符变量积分,也包括对 Grassmann 数的积分.

作为费米系统的 IWOP 技术的一个明显的应用,可以证明费米子相干态的完备性

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\bar{\alpha}_i \mathrm{d}\alpha_i\, |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| &= \int \mathrm{d}\bar{\alpha}_i \mathrm{d}\alpha_i :\mathrm{e}^{-\bar{\alpha}_i\alpha_i+f_i^{\dagger}\alpha_i+\bar{\alpha}_i f_i-f_i^{\dagger}f_i}: \\ &= :\mathrm{e}^{f_i^{\dagger}f_i-f_i^{\dagger}f_i}: \\ &= 1,\end{aligned} \tag{14.14}$$

也可以用费米系统的 IWOP 技术导出正规乘积算符展开公式

$$\mathrm{e}^{f_i^{\dagger}\Lambda_{ij}f_j} = :\exp[f_i^{\dagger}(\mathrm{e}^{\Lambda}-1)_{ij}f_j]:. \tag{14.15}$$

证明如下,用 $\exp(f_i^{\dagger}\Lambda_{ij}f_j)|\vec{0}\rangle=|\vec{0}\rangle$和 Baker-Hausdorff 公式,有

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{f_i^{\dagger}\Lambda_{ij}f_j} f_l^{\dagger}\mathrm{e}^{-f_i^{\dagger}\Lambda_{ij}a_j} &= f_i^{\dagger}(\mathrm{e}^{\Lambda})_{il}, \\ \mathrm{e}^{f_i^{\dagger}\Lambda_{ij}f_j} f_l \mathrm{e}^{-f_i^{\dagger}\Lambda_{ij}f_j} &= (\mathrm{e}^{-\Lambda})_{li} f_i.\end{aligned} \tag{14.16}$$

从式(14.14)与式(14.5),得到

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{f_i^{\dagger}\Lambda_{ij}f_j} &= \int\prod_i \mathrm{d}\bar{\alpha}_i\mathrm{d}\alpha_i \mathrm{e}^{f_i^{\dagger}\Lambda_{ij}f_j}\,|\vec{\alpha}\rangle\langle\vec{\alpha}| \\ &= \int\prod_i \mathrm{d}\bar{\alpha}_i\mathrm{d}\alpha_i \mathrm{e}^{f_i^{\dagger}\Lambda_{ij}f_j}\mathrm{e}^{f_i^{\dagger}\alpha_i}\mathrm{e}^{-f_i^{\dagger}\Lambda_{ij}f_j}\mathrm{e}^{f_i^{\dagger}\Lambda_{ij}f_j}\,|\vec{0}\rangle\langle\vec{\alpha}|\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\bar{\alpha}_i\alpha_i} \\ &= \int\prod_i \mathrm{d}\bar{\alpha}_i\mathrm{d}\alpha_i :\mathrm{e}^{-\bar{\alpha}_i\alpha_i+f_i^{\dagger}(\mathrm{e}^{\Lambda})_{il}\alpha_l+\bar{\alpha}_i f_i-f_i^{\dagger}f_i}:\end{aligned}$$

$$=:\exp[f_i^\dagger(e^A-1)_{ij}f_j]:, \tag{14.17}$$

这个公式是非常有用的.

## 14.2 带s参数的费米系统Wigner算符与量子化规则

首先,回顾一下费米子 Wigner 算符,其在费米子相干态表象[218,219]

$$\Delta(\bar{\alpha},\alpha)=\frac{1}{2}\int d\bar{\beta}d\beta\mid\alpha+\beta\rangle\langle\alpha-\beta\mid\exp(\beta\bar{\alpha}-\alpha\bar{\beta})$$

$$=\int d\bar{\beta}d\beta\exp[\beta(f^\dagger-\bar{\alpha})-\bar{\beta}(f-\alpha)], \tag{14.18}$$

式中:$\beta,\bar{\beta}$ 也是 Grassmann 数,显然此式是从玻色系统的 Wigner 算符的相干态表象类比而得到的. 在费米子 Wigner 算符式(14.18)的基础上,引入一个带 $s$ 参数的 Wigner 算符 $\Delta_s(\bar{\alpha},\alpha)$,其形式如下[220]:

$$\Delta_s(\bar{\alpha},\alpha)=\int d\bar{\beta}d\beta\exp\left[\frac{s\bar{\beta}\beta}{2}+f^\dagger\beta-\bar{\beta}f-\bar{\alpha}\beta+\bar{\beta}\alpha\right]. \tag{14.19}$$

利用 Baker-Hausdorff 公式和费米算符 IWOP 技术,有

$$\Delta_s(\bar{\alpha},\alpha)=\int d\bar{\beta}d\beta:\exp\left[-\frac{1-s}{2}\bar{\beta}\beta+f^\dagger\beta-\bar{\beta}f-\bar{\alpha}\beta+\bar{\beta}\alpha\right]:$$

$$=\frac{1-s}{2}:\exp\left[-\frac{2}{1-s}(f^\dagger-\bar{\alpha})(f-\alpha)\right]:, \tag{14.20}$$

也可以得到更明显算符形式

$$\Delta_s(\bar{\alpha},\alpha)=\frac{1-s}{2}-f^\dagger f+f^\dagger\alpha+\bar{\alpha}f-\bar{\alpha}\alpha. \tag{14.21}$$

当取 $s=-1$ 时,从式(14.20)看出

$$\Delta_{s=-1}(\bar{\alpha},\alpha)=:\exp[-(f^\dagger-\bar{\alpha})(f-\alpha)]:=|\alpha\rangle\langle\alpha|, \tag{14.22}$$

式中：$|\alpha\rangle$ 正是费米子相干态式(14.5)．当 $s=0$ 时，则有

$$\Delta_{s=0}(\bar{\alpha},\alpha) = \frac{1}{2} : \exp[-2(f^\dagger - \bar{\alpha})(f-\alpha)] :, \quad (14.23)$$

这正是费米子 Wigner 算符的正规乘积形式[220].

根据式(14.21)的结果，$\Delta_s(\bar{\alpha},\alpha)$ 在费米子 Fock 空间中的矩阵元为

$$\begin{aligned}
\langle 0 \mid \Delta_s(\bar{\alpha},\alpha) \mid 0\rangle &= \frac{1-s}{2} - \bar{\alpha}\alpha, \\
\langle 1 \mid \Delta_s(\bar{\alpha},\alpha) \mid 1\rangle &= -\frac{s+1}{2} - \bar{\alpha}\alpha, \\
\langle 0 \mid \Delta_s(\bar{\alpha},\alpha) \mid 1\rangle &= \bar{\alpha}, \\
\langle 1 \mid \Delta_s(\bar{\alpha},\alpha) \mid 0\rangle &= \alpha,
\end{aligned} \quad (14.24)$$

把这些矩阵元合并为一个矩阵，得到

$$\Delta_s(\bar{\alpha},\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{1-s}{2} - \bar{\alpha}\alpha & \bar{\alpha} \\ \alpha & -\frac{s+1}{2} - \bar{\alpha}\alpha \end{pmatrix}. \quad (14.25)$$

注意到 $\Delta_s(\bar{\alpha},\alpha)$ 的对角元呈玻色性，这是因为两个 Grassmann 数之积看成一个整体表现出玻色性，而它的非对角元只出现一个 Grassmann 数，呈费米性，所以式(14.25)中矩阵称为超矩阵．人们由运算的自洽性要求超矩阵的求迹对 $2\times2$ 矩阵而言是两个对角元相减，因此

$$\mathrm{Str}[\Delta_s(\bar{\alpha},\alpha)] = 1, \quad (14.26)$$

这里 Str 表示对超矩阵求迹.

另一方面，将式(14.19)中的指数变为反正规乘积形式(记号 $\vdots\ \vdots$)，即

$$\begin{aligned}
\Delta_s(\bar{\alpha},\alpha) &= \int \mathrm{d}\bar{\beta}\mathrm{d}\beta \vdots \exp\left[-\frac{-1-s}{2}\bar{\beta}\beta - \bar{\beta}f + f^\dagger\beta - \bar{\alpha}\beta + \bar{\beta}\alpha\right] \vdots \\
&= \frac{-s-1}{2} \vdots \exp\left[\frac{2}{s+1}(f^\dagger - \bar{\alpha})(f-\alpha)\right] \vdots . \quad (14.27)
\end{aligned}$$

若移去反正规记号 $\vdots\ \vdots$，则式(14.27)就变为式(14.21)．当 $s=$

1 时，

$$\Delta_{s=1}(\bar{\alpha},\alpha)=-\vdots\exp[(f^\dagger-\bar{\alpha})(f-\alpha)]\vdots$$
$$=-\delta(f^\dagger-\bar{\alpha})\delta(f-\alpha). \tag{14.28}$$

根据式(14.20)并利用费米系统 IWOP 技术对下式进行积分，有

$$\int d\bar{\alpha}d\alpha\Delta_s(\bar{\alpha},\alpha)=\frac{1-s}{2}\int d\bar{\alpha}d\alpha:\exp\left(-\frac{2}{1-s}\bar{\alpha}\alpha+\frac{2}{1-s}f^\dagger\alpha+\frac{2}{1-s}\bar{\alpha}f-\frac{2f^\dagger f}{1-s}\right):$$
$$=1, \tag{14.29}$$

这就说明 $\Delta_s(\bar{\alpha},\alpha)$具有完备性．因此，对于任一个费米子算符函数 $\mathfrak{F}(f^\dagger,f)$，可以用 $\Delta_s(\bar{\alpha},\alpha)$进行展开，即

$$\mathfrak{F}(f^\dagger,f)=\int d\bar{\alpha}d\alpha\Delta_s(\bar{\alpha},\alpha)f(\bar{\alpha},\alpha), \tag{14.30}$$

式中：$f(\bar{\alpha},\alpha)$是有关 Grassmann 数的函数，这就是所定义费米系统含 $s$ 参数的赝量子对应．根据式(14.25)，能计算出

$$\mathrm{Str}[\Delta_{-s}(\bar{\alpha},\alpha)\Delta_s(\bar{\beta},\beta)]$$
$$=\mathrm{Str}\left[\begin{pmatrix}\frac{1+s}{2}-\bar{\alpha}\alpha & \bar{\alpha}\\ \alpha & -\frac{s+1}{2}-\bar{\alpha}\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1-s}{2}-\bar{\beta}\beta & \bar{\beta}\\ \beta & -\frac{s+1}{2}-\bar{\beta}\beta\end{pmatrix}\right]$$
$$=\delta(\beta-\alpha)\delta(\bar{\beta}-\bar{\alpha}). \tag{14.31}$$

对于$\mathfrak{F}(f^\dagger,f)$的赝经典对应函数为

$$\mathrm{Str}[\Delta_{-s}(\bar{\alpha},\alpha)\mathfrak{F}(f^\dagger,f)]=\int d\bar{\beta}d\beta\mathrm{Str}[\Delta_{-s}(\bar{\alpha},\alpha)\Delta_s(\bar{\beta},\beta)]f(\bar{\beta},\beta)$$
$$=f(\bar{\alpha},\alpha). \tag{14.32}$$

可以看出式(14.32)正是式(14.30)逆运算，这两式统称为费米系统中的带 $s$ 参数的量子化规则．由于 $s=0$ 时，式(14.32)与式(14.30)就变成我们熟悉的费米子算符与 Grassmann 数函数的赝 Wely 对应规则，即

$$G(f^{\dagger},f)=\int \mathrm{d}\bar{\alpha}\mathrm{d}\alpha\Delta(\bar{\alpha},\alpha)g(\bar{\alpha},\alpha), \tag{14.33}$$

$$\mathrm{Str}[\Delta(\bar{\alpha},\alpha)G(f^{\dagger},f)]=g(\bar{\alpha},\alpha). \tag{14.34}$$

所以,成功地建立了费米子算符与 Grassmann 数函数之间带 $s$ 参数的一一赝对应,其中赝 Wely 对应规则只是它的特殊情况.

## 14.3 费米密度矩阵的 $s$ 编序展开公式与 IWSOP 技术

为导出费米密度矩阵的 $s$ 编序展开公式,与玻色的情况类似,先求费米子相干态密度算符 $\rho_f=|\alpha\rangle\langle\alpha|$. 根据式(14.32)可以得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{Str}[\Delta_{-s}(\bar{\beta},\beta)\mid\alpha\rangle\langle\alpha\mid]\\&=\langle\alpha\mid\frac{1+s}{2}:\exp\left[-\frac{2}{1+s}(f^{\dagger}-\bar{\beta})(f-\beta)\right]:\mid\alpha\rangle\\&=\frac{1+s}{2}\exp\left[-\frac{2}{1+s}(\bar{\alpha}-\bar{\beta})(\alpha-\beta)\right],\end{aligned} \tag{14.35}$$

这就是$|\alpha\rangle\langle\alpha|$在 Grassmann 数空间里的带 $s$ 参数赝经典对应,它表示一种新分布. 对这种 $s$ 参数的分布,可以定义$|\alpha\rangle\langle\alpha|$的 $s$ 编序形式为

$$|\alpha\rangle\langle\alpha|=\frac{1+s}{2}\,\S\exp\left[-\frac{2}{1+s}(\bar{\alpha}-f^{\dagger})(\alpha-f)\right]\S, \tag{14.36}$$

其中:用§ §来表示费米算符的 $s$ 编序. 这个定义能够把我们所知道的$|\alpha\rangle\langle\alpha|$的那些编序形式包含在内. 例如,当取 $s=0,1,-1$ 时,记号§ §分别变为 Weyl 编序$\vdots\ \vdots$、正规乘积$:\ :$以及反正规乘积$\vdots\ \vdots$,即

$$\begin{aligned}|\alpha\rangle\langle\alpha|&=\frac{1}{2}\vdots\exp[-2(f^{\dagger}-\bar{\alpha})(f-\alpha)]\vdots\\&=:\exp[-(\bar{\alpha}-f^{\dagger})(\alpha-f)]:\end{aligned}$$

$$= \vdots \delta(\alpha - f)\delta(\bar{\alpha} - f^{\dagger}) \vdots , \tag{14.37}$$

这里最后一步利用了 $\delta(\alpha)=\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon\exp\left(-\frac{\alpha}{\epsilon}\right)$.

对于费米子 $P$ 表示被定义为[221]

$$\rho_f = \int \mathrm{d}\bar{\alpha}\mathrm{d}\alpha P(\alpha) \mid \alpha\rangle\langle\alpha\mid . \tag{14.38}$$

再考虑费米子相干态的内积式(14.7),可得

$$\begin{aligned}\langle -\alpha' \mid \rho \mid \alpha'\rangle &= \int \mathrm{d}\bar{\alpha}\mathrm{d}\alpha P(\alpha)\exp[-\bar{\alpha}'\alpha' - \bar{\alpha}\alpha + \bar{\alpha}\alpha' - \bar{\alpha}'\alpha] \\ &= \mathrm{e}^{-\bar{\alpha}'\alpha'}\int \mathrm{d}\bar{\alpha}\mathrm{d}\alpha P(\alpha)\exp(-\bar{\alpha}\alpha)\exp(\bar{\alpha}\alpha' - \bar{\alpha}'\alpha).\end{aligned} \tag{14.39}$$

把上式看作傅里叶变换,则其逆变换是

$$P(\alpha) = \mathrm{e}^{\bar{\alpha}\alpha}\int \mathrm{d}\bar{\alpha}'\mathrm{d}\alpha'\langle -\alpha' \mid \rho_f \mid \alpha'\rangle\exp(\bar{\alpha}'\alpha' + \bar{\alpha}'\alpha - \bar{\alpha}\alpha'). \tag{14.40}$$

将式(14.40)与式(14.36)代入式(14.38)有

$$\begin{aligned}\rho_f = &\frac{1-s}{2}\int \mathrm{d}\bar{\alpha}'\mathrm{d}\alpha'\langle -\alpha' \mid \rho_f \mid \alpha'\rangle \cdot \\ &\S \exp\left[\frac{2}{1-s}(-s\bar{\alpha}'\alpha' - f^{\dagger}\alpha' + \bar{\alpha}'f + f^{\dagger}f)\right]\S ,\end{aligned} \tag{14.41}$$

这就是费米密度矩阵的 $s$ 编序展开公式. 一旦知道了 $\rho_f$ 的正规乘积形式,就能转化为 $s$ 编序的表达式. 例如,当 $s=-1$ 时,式(14.41)就变为

$$\rho = \int \mathrm{d}\bar{\alpha}'\mathrm{d}\alpha'\langle -\alpha' \mid \rho \mid \alpha'\rangle \vdots \exp[\bar{\alpha}'\alpha' - f^{\dagger}\alpha' + \bar{\alpha}'f + f^{\dagger}f] \vdots , \tag{14.42}$$

这正是将正规乘积费米算符转化为反正规乘积的公式[33].

接下来,基于上面的讨论,对于费米系统我们也引入 IWSOP 技术来解决 ket-bra 型 Berezin 积分问题[220],其性质如下:

(1) 任意两个费米子算符在 $s$ 编序记号 § § 内反对易,也就

是像 Grassmann 数一样交换，即 $\S\, f f^{\dagger}\, \S = \S -f^{\dagger} f\, \S$.

(2) "Grassmann 数-费米算符(GFOP)"在 § § 内部是对易的.

(3) 在 § § 内，由于所有的 GFOP 对易，所以可以看作是 $c$ 常数进行积分与微分运算.

(4) 费米真空投影算符 $|0\rangle\langle 0|$ 的 $s$ 编序形式为(从式(14.36)，令 $\alpha=0$ 可得)

$$|0\rangle\langle 0| = \frac{1+s}{2}\, \S \exp\left(-\frac{2}{1+s} f^{\dagger} f\right) \S . \tag{14.43}$$

(5) 当 $s=1,0,-1$ 时，§ § 分别变为正规乘积 : : 、Weyl 编序⋮ ⋮以及反正规乘积 ⁝ ⁝. 根据该性质，从式(14.43)，得到

$$\begin{aligned} |0\rangle\langle 0| &= \frac{1}{2} \vdots \exp(-2 f^{\dagger} f) \vdots, \\ |0\rangle\langle 0| &= : \exp(-f^{\dagger} f) :, \\ |0\rangle\langle 0| &= ⁝\, \delta(f)\delta(f^{\dagger})\, ⁝ = f f^{\dagger}. \end{aligned} \tag{14.44}$$

## 14.4 有关费米算符的 s 编序展开式

作为式(14.41)的应用，导出 $e^{\lambda f^{\dagger} f}$ 的 $s$ 编序展开式. 利用式(14.41)和式(14.15)以及 IWSOP 技术并积分，就有

$$\begin{aligned} e^{\lambda f^{\dagger} f} &= \frac{1-s}{2} \int d\bar{\alpha}' d\alpha' \exp[(1-e^{\lambda})(\bar{\alpha}'\alpha')] e^{-2\bar{\alpha}'\alpha'} \cdot \\ &\quad \S \exp\left[\frac{2}{1-s}(-s\bar{\alpha}'\alpha' - f^{\dagger}\alpha' + \bar{\alpha}' f + f^{\dagger} f)\right] \S \\ &= \frac{e^{\lambda} - s e^{\lambda} + 1 + s}{2}\, \S \exp\left[\frac{2(e^{\lambda}-1)}{e^{\lambda} - s e^{\lambda} + 1 + s} f^{\dagger} f\right] \S , \end{aligned} \tag{14.45}$$

对于式(14.45)的特殊情况，有

$$
e^{\lambda f^\dagger f}=\begin{cases} e^{\lambda}\ \vdots \exp[(1-e^{-\lambda})f^\dagger f]\ \vdots & s=-1\\ \dfrac{e^{\lambda}+1}{2}\ \vdots \exp\left(\dfrac{2e^{\lambda}-2}{e^{\lambda}+1}f^\dagger f\right)\vdots & s=0\\ :\exp[(e^{\lambda}-1)f^\dagger f]: & s=1\end{cases}. \quad (14.46)
$$

从式(14.46),便知道 $e^{\lambda f^\dagger f}$ 的赝 Weyl 经典对应为

$$
e^{\lambda f^\dagger f}\to\frac{e^{\lambda}+1}{2}\exp\left(\frac{2e^{\lambda}-2}{e^{\lambda}+1}\bar{\alpha}\alpha\right). \quad (14.47)
$$

下面导出 $e^{\lambda f_1^\dagger f_2^\dagger}e^{\sigma f_1 f_2}$ 的 $s$ 编序展开式,为此将式(14.41)推广到两模情况:

$$
\rho_f=\left(\frac{1-s}{2}\right)^2\int\prod_{i=1}^{2}d\bar{\alpha}'_i d\alpha'_i\langle-\alpha'_1,-\alpha'_2\mid\rho_f\mid\alpha'_1,\alpha'_2\rangle\cdot
$$
$$
\S\exp\left[\frac{2}{1-s}\sum_{i=1}^{2}(-s\bar{\alpha}'_i\alpha'_i-f_i^\dagger\alpha'_i+\bar{\alpha}'_i f_i+f_i^\dagger f_i)\right]\S, \quad (14.48)
$$

当 $\rho_f=\exp(\lambda f_1^\dagger f_2^\dagger)\exp(\sigma f_1 f_2)$ 时,根据 IWSOP 技术并积分,有

$$
\exp(\lambda f_1^\dagger f_2^\dagger)\exp(\sigma f_1 f_2)
$$
$$
=\left(\frac{1-s}{2}\right)^2\int d\bar{\alpha}'_2 d\alpha'_2 d\bar{\alpha}'_1 d\alpha'_1\langle-\alpha'_1,-\alpha'_2\mid e^{\lambda f_1^\dagger f_2^\dagger}e^{\sigma f_1 f_2}\mid\alpha'_1,\alpha'_2\rangle\cdot
$$
$$
\S\exp\left[\frac{2}{1-s}\sum_{i=1}^{2}(-s\bar{\alpha}'_i\alpha'_i-f_i^\dagger\alpha'_i+\bar{\alpha}'_i f_i+f_i^\dagger f_i)\right]\S
$$
$$
=\frac{1-s}{2}\int d\bar{\alpha}'_2 d\alpha'_2\ \S\exp\left[\frac{4-\sigma\lambda+2\sigma\lambda s-\sigma\lambda s^2}{2(1-s)}\bar{\alpha}'_2\alpha'_2+\right.
$$
$$
\left.\bar{\alpha}'_2\left(\frac{2}{1-s}f_2+\lambda f_1^\dagger\right)+\left(\sigma f_1-\frac{2}{1-s}f_2^\dagger\right)\alpha'_2\right]\cdot
$$
$$
\exp\left(\frac{2}{1-s}f_1^\dagger f_1+\frac{2}{1-s}f_2^\dagger f_2\right)\S
$$
$$
=\frac{4-\sigma\lambda+2\sigma\lambda s-\sigma\lambda s^2}{4}\cdot
$$
$$
\S\exp\left[\frac{4\sigma f_1 f_2-4\lambda f_2^\dagger f_1^\dagger+2\sigma\lambda(1-s)f_1 f_1^\dagger-2\sigma\lambda(1-s)f_2^\dagger f_2}{4-\sigma\lambda+2\sigma\lambda s-\sigma\lambda s^2}\right]\S. \quad (14.49)
$$

对于 $s=-1,0,1$ 的特殊情况，式(14.49)就变为

$$\exp(\lambda f_1^\dagger f_2^\dagger)\exp(\sigma f_1 f_2)$$

$$=\begin{cases}(1-\sigma\lambda)\vdots\exp\left(\dfrac{\sigma f_1 f_2-\lambda f_2^\dagger f_1^\dagger+\sigma\lambda f_1 f_1^\dagger-\sigma\lambda f_2^\dagger f_2}{1-\sigma\lambda}\right)\vdots, & s=-1\\ \dfrac{4-\sigma\lambda}{4}\vdots\exp\left(\dfrac{4\sigma f_1 f_2-4\lambda f_2^\dagger f_1^\dagger+2\sigma\lambda f_1 f_1^\dagger-2\sigma\lambda f_2^\dagger f_2}{4-\sigma\lambda}\right)\vdots & s=0\\ :\exp(\sigma f_1 f_2+\lambda f_1^\dagger f_2^\dagger): & s=1\end{cases}\tag{14.50}$$

最后一个例子，在文献[221]给出的费米双模压缩算符

$$\begin{aligned}U(r,\tau)&=-\tau^*\exp\left(\frac{r}{\tau^*}f_1^\dagger f_2^\dagger\right):\exp\left[(f_1^\dagger f_1+f_2^\dagger f_2)\left(\frac{-1}{\tau^*}-1\right)\right]\cdot\\&\quad:\exp\left(\frac{r^*}{\tau^*}f_1 f_2\right)\\&=\exp\left(\frac{r}{\tau^*}f_1^\dagger f_2^\dagger\right)\exp\left[(f_1^\dagger f_1+f_2^\dagger f_2-1)\ln\left(\frac{-1}{\tau^*}\right)\right]\cdot\\&\quad\exp\left(\frac{r^*}{\tau^*}f_1 f_2\right),\end{aligned}\tag{14.51}$$

其中：$|r|^2+|\tau|^2=1$. 将上式代入到式(14.48)，积分可得

$$\begin{aligned}U(r,\tau)=&-\frac{(1-s)(s\tau^*+s+\tau^*-1)}{4}\int d\bar{\alpha}_2' d\alpha_2'\cdot\\&\S\exp\left[-\frac{(s\tau^*+s+\tau^*-1)^2-|r|^2(1-s)^2}{(1-s)\tau^*(s\tau^*+s+\tau^*-1)}\bar{\alpha}_2'\alpha_2'+\right.\\&\bar{\alpha}_2'\left(\frac{2r}{s\tau^*+s+\tau^*-1}f_1^\dagger+\frac{2}{1-s}f_2\right)+\\&\left.\left(\frac{2r^*}{s\tau^*+s+\tau^*-1}f_1-\frac{2}{1-s}f_2^\dagger\right)\alpha_2'\right]\cdot\exp\left[\frac{2}{1-s}f_1^\dagger f_1+\right.\end{aligned}$$

$$\frac{2}{1-s}f_2^\dagger f_2-\frac{4\tau^*}{(1-s)(s\tau^*+s+\tau^*-1)}f_1^\dagger f_1\Big]\S$$

$$=-\frac{2s\tau^*-2+2s^2+s^2\tau^*+\tau^*-2s\tau+s^2\tau+\tau}{4}\cdot$$

$$\S\exp\Big[-\frac{4r}{2s\tau^*-2+2s^2+s^2\tau^*+\tau^*-2s\tau+s^2\tau+\tau}f_2^\dagger f_1^\dagger-$$

$$\frac{2\tau s+4s+2s\tau^*+2\tau^*-2\tau}{2s\tau^*-2-2s\tau+2s^2+s^2\tau^*+\tau^*+s^2\tau+\tau}(f_1^\dagger f_1+f_2^\dagger f_2)+$$

$$\frac{4r^*}{2s\tau^*-2+2s^2+s^2\tau^*+\tau^*-2s\tau+s^2\tau+\tau}f_1f_2\Big]\S,\tag{14.52}$$

它的特殊情况：当 $s=-1$ 时，

$$U(r,\tau)$$

$$=-\tau\,\vdots\,\exp\Big[\frac{r}{\tau}f_2^\dagger f_1^\dagger+\left(1+\frac{1}{\tau}\right)(f_1^\dagger f_1+f_2^\dagger f_2)+\frac{r^*}{\tau}f_1f_2\Big]\vdots,\tag{14.53}$$

当 $s=0$ 时，

$$U(r,\tau)=\frac{2-\tau-\tau^*}{4}\,\vdots\,\exp\Big[\frac{4r}{2-\tau-\tau^*}f_2^\dagger f_1^\dagger+$$

$$\frac{2\tau^*-2r}{2-\tau-\tau^*}(f_1^\dagger f_1+f_2^\dagger f_2)-\frac{4r^*}{2-\tau-\tau^*}f_1f_2\Big]\vdots,\tag{14.54}$$

当 $s=1$ 时，

$$U(r,\tau)=-\tau^*\exp\left(\frac{r}{\tau^*}f_1^\dagger f_2^\dagger\right):\exp\Big[(f_1^\dagger f_1+f_2^\dagger f_2)\left(\frac{-1}{\tau^*}-1\right)\Big]:$$

$$\exp\left(\frac{r^*}{\tau^*}f_1f_2\right),\tag{14.55}$$

# 参考文献

[ 1 ] Dirac P A M. Recollections of an exciting area: History of 20th Century Physics [M]. New York: Academic Press, 1977.

[ 2 ] Dirac P A M. Principles of quantum mechanics (4ed) [M]. Oxford: Claredon Press, 1958.

[ 3 ] Fan H Y Representation and transformation theory in quantum mechanics——progress of Dirac's symbolic method (in Chinese) [M]. Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publishers, 1997.

[ 4 ] Fan H Y. Entangled state representations in quantum mechanics and their applications (in Chinese) [M]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press, 2001.

[ 5 ] Fan H Y. From quantum mechanics to quantum optics——development of the mathematical physics (in Chinese) [M]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press, 2005.

[ 6 ] Fan H Y, Tang X B. Progress of mathematics and physics foundation in quantum mechanics (in Chinese) [M]. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2008.

[ 7 ] Fan H Y, Hu L Y. Optical transformation: from quantum optics to classical optics (in Chinese) [M]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press, 2010.

[ 8 ] Wünsche, A. About integration within ordered products in quantum optics [J]. J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt., 1999, 1: R11 - R21.

[ 9 ] Fan H Y, Lu H L, Fan Y. Newton-Leibniz integration for ket-bra operators in quantum mechanics and derivation of entangled state representations [J]. Ann. Phys., 2006, 321(2): 480 - 494.

[10] Fan H Y. Newton-Leibniz integration for ket-bra operators (II)——application in deriving density operator and generalized partition function

formula [J]. Ann. Phys., 2007, 322(4): 866 - 885.

[11] Fan H Y. Newton-Leibniz integration for ket-bra operators (III)——application in fermionic quantum statistics [J]. Ann. Phys., 2007, 322 (4): 886 - 902.

[12] Fan H Y. Newton-Leibniz integration for ket-bra operators in quantum mechanics (IV)——Integrations within Weyl ordered product of operators and their applications [J]. Ann. Phys., 2008, 323(2): 500 - 526.

[13] Fan H Y. Newton-Leibniz integration for ket-bra operators in quantum mechanics (V)——Deriving normally ordered bivariate-normal-distribution form of density operators and developing their phase space formalism [J]. Ann. Phys., 2008, 323(6): 1502 - 1528.

[14] Fan H Y. Operator ordering in quantum optics theory and the development of Dirac's symbolic method [J]. J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt., 2003, 5: R147 - R163.

[15] Louisell W H. Quantum statistical properties of radiation [M]. New York: Wiley, 1973.

[16] Patel J K, Read C B. Handbook of the normal distribution [M]. New York: Dekker, 1982; Spiegel M R. Theory and problems of probability and statistics [M]. New York: MeGraw-Hill, 1992.

[17] Fan H Y, Guo Q. Generalized fredholm operator equation and its solution based on intermediate coordinate-momentum representation [J]. Phys. Scr., 2007, 76: 533 - 538.

[18] Fan H Y, Tang X B. Operator fredholm integration equation in intermediate coordinate-momentum representation and its analogue to thermo conduction equation [J]. Commun. Theor. Phys., 2008, 49 (5): 1169 - 1172.

[19] Fan H Y, Cheng H L. Two-parameter radon transformation of the Wigner operator and its inverse [J]. Chin. Phys. Lett., 2001, 18(7): 850 - 853.

[20] Fan H Y, Wang J S. New approach for calculating tomograms of quantum states by virtue of the IWOP technique [J]. Commun. Theor. Phys., 2007, 47(3): 431 - 136.

[21] Klauder J R, Skagerstam B S. Coherent States: Applications in physics and mathematical physics [M]. Singapore: World Scientific, 1985; Klauder J R, Sudarshan E C G. Fundamentals of quantum optics [M]. New York: Benjamin, 1968.

[22] Perelornov A M. Generalized coherent states and their applications [M]. Berlin: Springer, 1986.

[23] Zhang W M, Feng D H, Gilmore R. Coherent states: Theory and some applications [J]. Rev. Mod. Phys., 1990,62(4): 867 - 927.

[24] Onofri E. A note on coherent state representations of Lie groups [J]. J. Math. Phys., 1975, 16(5): 1087 - 1089.

[25] Perelornov A M. Coherent states for arbitrary Lie groups [J]. Comm. Math. Phys., 1972, 26: 222 - 236.

[26] Glauber R J. The Quantum theory of optical coherence [J]. Phys. Rev., 1963, 130: 2529 - 2539; Coherent and incoherent states of the radiation field[J]. Phys. Rev., 1963, 131: 2766 - 2788.

[27] Bogolyubov N N. Lectures on quantum statistics [M]. New York: Gordon and Breach, 1987.

[28] Fan H Y, VanderLinde J. Simple approach to the wave functions of one- and two-mode squeezed states [J]. Phys. Rev. A, 1989, 39(3): 1552 - 1555.

[29] Fan H Y. Normally ordering some multimode exponential operators by virtue of the IWOP technique [J]. J. Phys. A: Math. Gen., 1990, 23: 1833 - 1839.

[30] Berezin F A. The method of second quantisation [M]. New York: Academic, 1966.

[31] Fan H Y. New antinormal ordering expansion for density operators [J]. Phys. Lett. A, 1991, 161(1): 1 - 4.

[32] Fan H Y. Antinormal expansion for rotation operators in the schwinger representation [J]. Phys. Lett. A, 1988, 131(3): 145 - 150.

[33] Fan H Y. Antinormally ordering some multimode exponential operators by virtue of the IWOP technique [J]. J. Phys. A: Math. Gen., 1992, 25: 1013 - 1017.

[34] Mehta C L. Diagonal coherent-state representation of quantum operators [J]. Phys. Rev. Lett., 1967,18(18): 752 - 754.
[35] Wigner E P. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium [J]. Phys. Rev., 1932, 40: 749 - 759.
[36] Schleich W P. Quantum optics in phase space [M]. Berlin: Wiley-VEH, 2001.
[37] O'Connell R F, Wigner E P. Quantum-mechanical distribution functions: conditions for uniqueness [J]. Phys. Lett. A, 1981, 83: 145 - 148.
[38] Hillery M, Connel R, Scully M, Wigner E. Distribution functions in physics: fundamentals [J]. Phys. Rep., 1984, 106: 121 - 167.
[39] Fan H Y, Zaidi H R. Application of IWOP technique to the generalized Weyl correspondence [J]. Phys. Lett. A, 1987, 124(6): 303 - 307.
[40] Fan H Y, Wang T T. Generalized Wigner operator and bivariate normal distribution in p-q phase space [J]. Commun. Theor. Phys., 2008, 50 (6): 1299 - 1302.
[41] Weyl H. Quantenmechanik und Gruppentheorie [J]. Z. Phys. 1927, 46: 1 - 46.
[42] Weyl H. The theory of groups and quantum mechanics [M]. New York: Dover, 1931.
[43] Fan H Y. Weyl ordering quantum mechanical operators by virtue of the IWWP technique [J]. J. Phys. A Math. Gen., 1992: 25: 3443 - 3447.
[44] Fan H Y. General Wigner transforms studied by virtue of Weyl ordering of the Wigner operator [J]. Commun. Theor. Phys., 2003, 40 (4): 409 - 414.
[45] Ka X L. Advanced quantum mechanics [M] (in Chinese). Beijing: High Educational Press, 1999.
[46] Fan H Y, Yuan H C, Jiang N Q. Operators' ordering: from Weyl ordering to normal ordering [J]. Sci. China Ser. G: Phys. Mech. Astron., 2011, 54(8): 1394 - 1397.
[47] Fan H Y, Xu X L, Li H Q. Recapitulating quantum phase space representation by virtue of normally ordered Gaussian form of Wigner operator [J]. Commun. Theor. Phys., 2010, 53(2): 261 - 264.

[48] Fan H Y, Weyl-ordered operator Moyal bracket by virtue of method of integral within an Weyl ordered product of operators [J]. Commun. Theor. Phys., 2006, 45(2): 245 - 248.

[49] Fan H Y, Wang J S. On the Weyl ordering invariance under general n-mode similar transformations [J]. Mod. Phys. Lett. A, 2005, 20 (20): 1525 - 1532.

[50] Fan H Y, Zou H, Wang H. Coherent state representation for a kind of operator disentangling formulae [J]. Commun. Theor. Phys., 2002, 34 (3): 541 - 546.

[51] Fan H Y, Chen J H. Coherent state projection operator representation of symplectic transformations as a loyal representation of symplectic group [J]. Commun. Theor. Phys., 2002, 38: 147 - 150.

[52] Fan H Y, Wünsche A. Design of squeezing [J]. J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt., 2000, 2: 464 - 469.

[53] Fan H Y, VanderLinde J. Mapping of classical canonical transformations to quantum unitary operators [J]. Phys. Rev. A, 1989, 39(6): 2987 - 2993.

[54] Fan H Y, Lu H L. Wave-function transformations by general $SU(1,1)$ single-mode squeezing and analogy to Fresnel transformations in wave optics [J]. Opt. Commun., 2006, 258: 51 - 58.

[55] Fan H Y, Hu L Y. ABCD rule involved in the product of general $SU(1,1)$ squeezing operators and quantum states' Fresnel transformation [J]. Opt. Commun., 2008, 281: 1629 - 1634.

[56] Fan H Y, Hu L Y. Weyl ordering operator formula derived by IWOP technique and its application for Fresnel operator [J]. Commun. Theor. Phys., 2009, 52(5): 840 - 844.

[57] James D F V, Agarwal G S. The generalized Fresnel transform and its application to optics [J]. Opt. Commun., 1996,126(4): 207 - 212.

[58] Wang S M, Zhao D M. Matrix Optics [M], BeiJing: Higher Education Press and Berlin: Springer-Verlag, 2000.

[59] Wang S, Yuan H C, Fan H Y. Fresnel operator, squeezed state and Wigner function for Caldirola-Kanai Hamiltonian [J]. Accepted by

Mod. phys. Lett. A.

[60] Um C I, Yeon K H, George T F., The quantum damped harmonic oscillator [J]. Phys. Rep., 2002, 362:63 - 192.

[61] Choi J R. Dynamics of $SU(1,1)$ coherent states for the time-dependent quadratic Hamiltonian system [J]. Opt. Commun., 2009, 282: 3720 - 3728.

[62] Wünsche A. Radon transform and pattern functions in quantum tomography [J]. J. Mod. Opt., 1997, 44:2293 - 2331.

[63] Smithey D T, Beck M, Raymer M G, Faridani A. Measurement of the Wigner distribution and the density matrix of a light mode using optical homodyne tomography: Application to squeezed states and the vacuum [J]. Phys. Rev. Lett., 1993, 70(9): 1244 - 1247.

[64] Xu Y J, Fan H Y, Liu Q Y. New equantion for deriving pure state density operators by Weyl correspondence and Wigner operator [J]. Chin. Phys. B, 2010, 19(2): 020303.

[65] Xu X F. Obtaining multimode entangled state representation by generalized Randon transformation of the Wigner operator [J]. Int. J. Theor. Phys., 2010, 49(7): 1446 - 1451.

[66] Einstein A, Podolsky B, Rosen N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? [J]. Phys. Rev., 1935, 47 (10): 777 - 780.

[67] Fan H Y, Klauder J R. Eigenvectors of two particles' relative position and total momentum [J]. Phys. Rev. A, 1994, 49(2): 704 - 707.

[68] Fan H Y, Xiong Y. Common eigenstates of two particles' center-of-mass coordinates and mass-weighted relative momentum [J]. Phys. Rev. A, 1995, 51(4): 3343 - 3346; Fan H Y, Liu N L. Differential completeness relation in two-mode mass-weighted representations [J]. Chin. Phys. Lett., 1999,16(9): 625 - 627.

[69] Fan H Y, Jiang N Q. Tripartite entangled Wigner operator, the Wigner function and its marginal distributions [J]. J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt., 2003, 5: 283 - 288; Fan H Y, Jiang N Q. The relation between three types of three-mode squeezing operators and the tripartite

entangled state [J]. J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt., 2004, 6: 238 - 242.

[70] Fan H Y, Jiang N Q. New three-mode Einstein-Podolsky-Rosen entangled state representation and its application in squeezing theory [J]. Chin. Phys. Lett., 2002, 19(10): 1403 - 1406.

[71] Jiang N Q. The n-partite entangled Wigner operator and its applications in Wigner function [J]. J. Opt. B Quantum Semiclass. Opt., 2005, 7: 264 - 267.

[72] Yuan H C, Li H M, Qi K G. Continuous multipartite entangled representation and its Wigner operator and marginal distribution [J]. Commun. Theor. Phys., 2005, 44(6): 1015 - 1020.

[73] Li H M, Yuan H C. Multi-mode Einstein Podolsky Rosen entangled state representation and its applications [J]. Commun. Theor. Phys., 2008, 50(3): 615 - 618.

[74] Nielsen M, Chuang I. Quantum computation and quantum information [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

[75] Braunstein S L, Pati A K. Quantum information with continuous variables [M]. Netherland: Kluwer Academic Publisher, 2003.

[76] Fan H Y, Fan Y. Representations of two-mode squeezing transformations [J]. Phys. Rev. A, 1996, 54(1): 958 - 960.

[77] Fan H Y. Entangled states, squeezed states gained via the route of developing Dirac's symbolic method and their applications [J]. Int. J. Mod. Phys. B, 2004, 18(10 - 1 1): 1387 - 1455.

[78] Fan H Y, Fan Y. Time evolution of the Wigner function in the entangled-state representation [J]. Phys. Rev. A, 2002, 65: 064102.

[79] Fan H Y, Hu L Y. Operator-sum representation of density operators as solutions to master equations obtained via the entangled state approach [J]. Mod. Phys. Lett. B, 2008, 22(25): 2435 - 2468.

[80] Fan H Y, Fan Y. New representation of thermal states in thermal field dynamic [J]. Phys. Lett. A, 1998, 246: 242 - 246; Fan H Y, Fan Y. New representation for thermo excitation and de-excitation in thernofield dynamics [J]. Phys. Lett. A, 2001, 282: 269 - 275.

[81] Fan H Y. Application of EPR entangled state representation in quantum teleportation of continuous variables [J]. Phys. Lett. A, 2002, 294: 253 - 257; Fan H Y, Liang X T. Quantum dense coding with operational phase operator measurement studied by virtue of EPR eigenstate representation [J]. Phys. Lett. A, 2001, 291: 61 - 65.

[82] Fan H Y, Lu H L. Classical optical transforms studied in the context of quantum optics via the route of developing Dirac's symbolic method [J]. Int. J. Mod. Phys. B, 2005, 19(5): 799 - 856.

[83] Fan H Y, Xu X X, Yuan H C, et. al. New approach for obtaining positive definite Wigner operator for two entangled partices with different masses [J]. Chin. Phys. B, 2011, 20(7): 070301.

[84] Wang J S, Meng X G, Fan H Y. Energy-level and wave functions of two moving charged particles with elastic coupling derived by virtue of the entangled state representations [J]. Physica A, 2008, 387:4453 - 4458.

[85] Hu L Y, Zhou R Z, Fan H Y. Calculation of Gaussian perturbation on two harmonic oscillators by virtue of entangled state representation [J]. Commun. Theor. Phys., 2007, 48(4): 629 - 632.

[86] Barnett S M, Radmore P M. Method in theoretical quantum optics [M]. Oxford: Clarendon Press, 1997; Scully M O, Zubairy MS. Quantum optics [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

[87] Tang X B, Fan H Y. Complex-variable Fokker-Planck equation solved in entangled state representation [J]. Theor. Phys., 2010, 53(6): 1049 - 1052.

[88] Bracewell R N. The Fourier transform and its applications [M]. 3rd ed. Boston: MeGraw-Hill, 2000.

[89] James J F. A Student's guide to Fourier transforms [M]. 2nd ed. New York: Cambridge University Press, 2002.

[90] Widder D V. The Laplace transform [M], Princeton Mathematical Series, v. 6. Princeton: Princeton University Press, 1941.

[91] Deakin M A B. The development of the Laplace transform [J], Archive for the History of the Exact Sciences, 1981, 25: 343 - 390; 1821, 26: 351 - 381.

[ 92 ] Bronshtein I N, Semendyayev K A, Musiol G, Mueblig H. Handbook of mathematics [M]. 4th ed. New York: Springer-Verlag,; 2004; 705 - 706.

[ 93 ] Arfken G. Mathematical methods for physicists [M]. 3rd ed. Orlando FL: Academic Press,: 1985: 795.

[ 94 ] Fan H Y. New two-fold integration transformation for the Wigner operator in phase space quantum mechanics and its relation to operator ordering [J]. Chin. Phys. B, 2010, 19(4): 040305.

[ 95 ] Fan H Y. A new kind of two-fold integration transformation in phase space and its uses in Weyl ordering of operators [J]. Common. Theor. Phys., 2008, 50(4): 935 - 937.

[ 96 ] Fan H Y, Hu L Y. Optical transformation from chirplet to fractional Fourier transformation kernel [J]. J. Mod. Opt., 2009, 56(11): 1227 - 1229.

[ 97 ] Fan H Y, Yuan H C. New transformation of Wigner operator in phase space quantum mechanics for the two-mode entangled case [J]. Chin. Phys. B, 2010, 19(7): 070301.

[ 98 ] Vogel K, Risken H. Determination of quasiprobability distributions in terms of probability distributions for the rotated quadrature phase [J]. Phys. Rev. A, 1989, 40(5): 2847 - 2849.

[ 99 ] Kasperkovitz P, Peev M. Wigner-Weyl formalism for toroidal geometries [J]. Ann. Phys., 1994, 230:21 - 25.

[100] Magnus W, Oberhettinger F. Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics [M]. New York: Chelsea, 1949.

[101] Ballentine L E. Quantum mechanics: Modern development [M]. Singapore: World Scientific, 1998.

[102] Wunsche A. Laguerre 2D-functions and their application in quantum optics [J]. J. Phys. A: Math. Gen., 1998,31:8267 - 8287.

[103] Lu H L, Fan H Y. Two-variable Hermite function as quantum entanglement of harmonic oscillator's wave functions [J]. Commun. Theor. Phys., 2007, 47: 1024 - 1028.

[104] Fan H Y, Chen J H. EPR entangled state and generalized Bargmann

transformation [J]. Phys. Lett. A, 2002,303(5): 311 - 317.

[105] Hu L Y, Fan H Y. Two-mode squeezed number state as a two-variable Hermite-polynomial excitation on the squeezed vacuum [J]. J. Mod. Opt., 2008, 55(13): 2011 - 2024.

[106] Hu L Y, Fan H Y. Two-variable Hermite polynomial excitation of two-mode squeezed vacuum state as squeezed two-mode number state [J]. Commun. Theor. Phys., 2008, 50(4): 965 - 970.

[107] Fan H Y, Lu H L. Eigenmodes of fractional Hankel transform derived by the entangled-state method [J]. Opt. Lett., 2003, 28 (6), 680 - 682.

[108] Fan H Y, Xu X F. Talbot effect in a quadratic-index medium studied with two-variable Hermite polynomials and entangled states [J]. Opt. Lett., 2004, 29(15): 1048 - 1050.

[109] Fan H Y, Fan Y. Normally ordered operator Fredholm equation and its applications in quantum mechanics [J]. Commun. Theor. Phys., 2000, 34(1): 149 - 154.

[110] Rainville E D. Special functions [M]. New York: MacMillan Company, 1960.

[111] Gradshteyn I S, Ryzhik I M. Table of integrals, series, and products [M]. New York: Academic Press, 1980.

[112] Fan H Y. New operator ordering formulas related to Hermite polynomials derived by virtue of IWOP technique [J]. Commun. Theor. Phys., 2004, 42(3): 339 - 342.

[113] Fan H Y, Yuan H C, Jiang N Q. New identities about operator Hermite polynomials and their related integration formulas [J]. Accepted by Sci. China Ser. G: Phys. Mech. Astron.

[114] Fan H Y, Fu L. Normally ordered expansion of the inverse of the coordinate operator and the momentum operator [J]. J. Phys. A Math. Gen., 2003, 36: 4987 - 4992.

[115] Fan H Y, Wang T T. New operator identities and integration formulas regarding to Hermite polynomials obtained via the operator ordering method [J]. Int. J. Theor. Phys., 2009, 48: 441 - 448.

[116] Fan H Y, Fu L. Normally ordered expansion of the inverse of the coordinate operator and the momentum operator [J]. J. Phys. A: Math. Gen., 2003, 36: 4987 - 4992.

[117] Li H M, Yuan H C. Simple approach to deriving some operator ordering formulas in qüantum optics [J]. Int. J. Theor. Phys., 2010, 49: 2121 - 2130.

[118] Meng X G, Wang J S, Liang B L. Normal ordering and antinormal ordering of operator $(fQ + gP)^n$ and some of their applications [J]. Chin. Phys. B, 2009, 18(4): 1534.

[119] Fan H Y, Guo Q. Generalized Fredholm operator equation and its solution based on intermediate coordinate-momentum representation [J], Phys. Scr., 2007, 76: 533 - 538.

[120] Fan H Y, Meng X G, Wang J S. New form of Legendre polynomials obtained by virtue of exicited squeezed state and IWOP technique in quantum optics [J]. Commun. Theor. Phys., 2004, 46 (5): 845 - 848.

[121] Zhang Z X, Fan H Y. Properties of states generated by excitations on a squeezed vacuum state [J]. Phys. Lett. A, 1992, 165(1): 14 - 18.

[122] Meng X G, Wang J S, Fan H Y. Wigner function and tomogram of the excited squeezed vacuum state [J]. Phys. Lett. A, 2007, 361: 183 - 189.

[123] Hu L Y, Fan H Y. Statistical properties of the photon-subtracted squeezed vacuum in thermal environment [J]. J. Opt. Soc. Am. B, 2008, 25: 1955 - 1964.

[124] Wakui K, Takahashi H, Furusawa A, Sasaki M. Controllable generation of highly nonclassical states from nearly pure squeezed vacua [J]. Opt. Express, 2007, 15: 3568 - 3574.

[125] Fan H Y, Yuan H C, Jiang N Q. Deriving new operator identities by alternately using normally, antinormally, and Weyl ordered integration technique [J]. Sci. China Ser. G: Phys. Mech. Astron., 2010, 53: 1626 - 1630.

[126] Magnus W, Oberhettinger F, Soni R P. Formulas and theorems for

the special functions of mathematical physics [M]. Berlin: Springe, 1996.

[127] Fan H Y, Fan Y. New Bosonic operator ordering identites gained by the entangled state representa - tion and two-variable Hermite polynomials [J]. Commun. Theor. Phys., 2002, 38(3): 297 - 300.

[128] Yuan H C, Xu X X, Fan H Y. Statistical properties of the generalized photon-added pair coherent state [J]. Int. J. Theor. Phys., 2009, 48: 3596 - 3606.

[129] Fan H Y, Hu L Y, Wang J S. Eigenfunctions of the complex fractional Fourier transform obtained in the context of quantum optics [J]. J. Opt. Soc. Am. A, 2008, 25(4), 974 - 978.

[130] Fan H Y, Yuan H C. Entangled state representation for deriving new operator identities regarding to two-variable Hermite polynomial [J]. To be submitted.

[131] Erdélyi A. Higher transcendental functions [M], The Bateman Manuscript Project, New York: McGraw-Hill, 1953.

[132] Hu L Y, Fan H Y. Statistical properties of photon-added coherent state in a dissipative channel [J]. Phys. Scr., 2009, 79: 035004.

[133] Fan H Y. Normally ordering some multimode exponential operators by virtue of the IWOP technique [J]. J. Phys. A:Math. Gen., 1990, 23: 1833 - 1839.

[134] Hu L Y, Xu X X, Fan H Y. Statistical properties of photon-subtracted two-mode squeezed vacuum and its decoherence in thermal environment [J]. J. Opt. Soc. Am. B, 2010, 27(2): 286 - 299.

[135] Zhang Z X, Fan H Y. Some properties of states engendered by the excitations on a two-mode squeezed vacuum state [J]. Phys. Lett. A, 1993, 174(3): 206 - 209.

[136] Xu X X, Hu L Y, Fan H Y. On the normalized two-mode photon-substracted squeezed vaccum state [J]. Mod. Phys. Lett. A, 2009, 24 (32): 2623 - 2630.

[137] Fan H Y, Jiang N Q. Operator formulas involving generalized stirling number derived by virtue of normal ordering of vacuum projector [J].

Commun. Theor. Phys., 2010, 54(4): 651 - 653.

[138] Fan H Y, Ou-Yang J, Jiang Z H. New operator identities and combinatorics studied by virtue of IWOP technique [J]. Commun. Theor. Phys., 2006, 45(1): 49 - 54.

[139] Lü C H, Fan H Y. A Kind tripartite entangled state representation and its application in quantum teleportation [J]. Int. J. Theor. Phys., 2010, 49: 1944 - 1951.

[140] Lü C H, Fan H Y. New two mutually conjugate tripartite entangled state representations: definition and application [J]. To be submitted.

[141] Fan H Y, Jiang N Q, Lu H L. Tripartite entangled state representation and its application in quantum teleportation [J]. Mod. Phys. Lett. B, 2002, 16(30): 1193 - 1200.

[142] Fan H Y, Jiang N Q. Theory of tomography for the Wigner function of tripartite entangled system [J]. Int. l J. Mod. Phys. B, 2003, 17 (30): 5737 - 5747.

[143] Peres A. Higher order Schmidt decomposition [J]. Phys. Lett. A, 1995, 202: 16 - 17.

[144] Pati A K. Existence of the Schmidt decomposition for tripartite systems [J]. Phys. Lett. A, 2000, 278:118 - 122.

[145] Fan H Y, Fan Y. Fractional fourier transformation for quantum mechanical wave functions studied by virtue of IWOP technique [J]. Commun. Theor. Phys., 2003, 39: 417 - 420.

[146] Fan H Y, Jiang N Q. On the entangled fractional Fourier transform in tripartite entangled state representation [J]. Commun. Theor. Phys., 2003, 40: 39 - 44.

[147] Fan H Y, Fan Y. EPR entangled states and complex fractional Fourier transformation [J]. Eur. Phys. J. D, 2002, 21: 233 - 238.

[148] Qian X Q, Song TQ. Entangled fractional Fourier transform for the multipartite entangled state representation [J]. Commun. Theor. Phys., 2006, 45: 1097 - 1101.

[149] Fan H Y, Hu L Y., Wang J S. Eigenfunctions of the complex fractional Fourier transform obtained in the context of quantum optics [J].

J. Opt. Soc. Am. A, 2008, 25: 974 - 978.
[150] Lü C H, Fan H Y. Entangled fractional Fourier transform derived via non-unitary SU(2) bosonic operator realization and its convolution theorem [J]. Opt. Commun., 2011: 1925 - 1932.
[151] Wybourne B G. Classical groups for physicists [M]. New York: Wiley, 1974.
[152] Arrechi F T, Courtens E, Gilmore R, Thomas H. Atomic coherent states in quantum optics [J]. Phys. Rev. A, 1972, 6: 2211 - 2237.
[153] Goodman J W. Introduction to Fourier optics [M]. New York: Me-Graw-Hill, 1968.
[154] Zayed A I. A Convolution and product theorem for the fractional Fourier transform [J]. IEEE Singal Processing Lett., 1998,5: 101 - 103.
[155] Airneida L B. Product and convolution theorems for the fractional Fourier transform [J]. IEEE Singal Processing Lett., 1997,4: 15 - 17.
[156] Zayed A I. A Convolution and product theorem for the fractional Fourier transform [J], IEEE Singal Processing Lett., 1998,5: 101 - 103.
[157] Liu S G, Fan H Y. Convolution theorem for the three-dimensional entangled fractional Fourier transformation deduced from the tripartite entangled state representation [J]. Theor. Math. Phys., 2009,161: 1710 - 1718.
[158] Takahashi Y, Umezawa H. Thermo field dynamics [J]. Collective Phenomena 1975, 2: 55. Memorial Issue for H. Umezawa, Int. J. Mod. Phys. B 1996,10: 1563.
[159] Hu L Y, Fan H Y. Generalized thermo vacuum state derived by the partical trace method [J]. Chin. Phys. Lett. 2009, 26 (9): 090307.
[160] Barnett S M, Radmore P M. Methods in theoretical quantum optics [M]. Oxford: Clarendon Press, 1997.
Hu L Y, Fan H Y. New convenient way for deriving exponential operators' disentangling formulas and their applications[J]. Commun. Theor. Phys., 2009, 51: 321.
[161] Fan H Y, Xu X X. Mean energy of some interacting bosonic systems derived by virtue of the generalized Hellmann-Feynman theorem [J].

J. Math. Phys., 2009, 50: 063303.

[162] Fan H Y, Xu X X, Hu L Y. Entroy-variation with resistance in a quantized RLC circuit derived by the generalized Hellmann-Feynman theorem [J]. Chin. Phys. B, 2010, 19(6): 060502.

[163] Pathria R K. Statistical mechannics [M]. 2nd ed. Singapore: World Scientific, 2001.

[164] Hu L Y, Fan H Y. Wigner functions of thermo number state, photon subtracted and added thermo vacuum state at finite temperature [J]. Mod. Phys. Lett. A, 2009, 24(28): 2263 - 2274.

Fan H Y, Jiang N Q. Thermo Wigner operator in thermo field dynamics: its introduction and application [J]. Phys. Scr., 2008, 78: 045402.

[165] Fan H Y, Chen H L. Two-parameter radon transformation of the wigner operator and its inverse [J]. Chin. Phys. Lett., 2001, 18: 850.

[166] Mandel L, Wolf E. Optical coherence and quantum optics [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[167] Fan H Y, Hu L Y. New convenient way for deriving exponential operators' disentangling formulas and their applications (II) [J]. Commun. Theor. Phys. 2009, 51: 506.

[168] Xue X X, Fan H Y, Hu L Y, Yuan H C. Generalzed two-mode thermal vacuum state for Hamiltonian of parametric amplifier derived by IWOP method [J]. Physica A, 2010, 390: 18 - 23.

[169] Fan H Y, Chen B Z. Generalized Feynman-Hellmann theorem for ensemble averge values [J]. Phys. Lett. A, 1995, 203: 95.

Fan H Y, Jiang Z H. Deriving internal energy by virtue of generalized Feynman-Hellmann theorem for mixed states [J]. Commun. Theor. Phys., 2005, 44: 1041.

Xu X X, Fan H Y, Hu L Y. Statistical properties of the Hamiltonian generating phase state derived by using the generalized Feynman-Hellmann theorem [J]. Physica A, 2010, 389: 2014 - 2019.

[170] Orszag M. Quantum optics [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2000.

[171] Hamilton W R. On quaternions, or on a new system of imaginaries in algebra [J]. Philosophical Magazine., 1844,25(3): 489 - 495.

[172] Altmann S L. Rotations, quaternions, and double groups [M]. Oxford: Clarendon Press, 1986.

[173] Adier S L. Quaternionic quantum mechanics and quantum fields [M]. New York: Oxford University Press, 1995.

[174] Kantor I L, Solodnikov A S. Hypercomplex numbers, an elementary introduction to algebras [M]. New York: Springer-Verlag, 1989.

[175] Fan H Y, Xu Z H. Gaussian integral formula for quaternions based on class operator's formula of rotation group [J]. Commun. Theor. Phys., 2008, 50: 861 - 863.

[176] Press W H, Flannery B P, Teukolsky S A, Vetterling W T. LU Decomposition and Its Applications [M]. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

[177] Golub G H, Van loan C F. Matrix computations 3rd ed. [M]. Baltimore: Johns Hopkins, 1996.

[178] Horn R A, Johnson C R. Matrix analysis [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

[179] Fan H Y, Yuan S J. Quantum mechanical exponential operators' disentangling by virtue of matrices' LDU decomposition [J]. J. Phys. A: Math. Theor., 2008, 41: 285303.

[180] Fan H Y, Yuan S J. Quantum mechanical Image of Matrices' LDU decomposition [J]. Commun. Theor. Phys., 2010, 53(6): 1024 - 1026.

[181] Xu Y J, Fan H Y, Liu Q Y. Mapping of matrices' LDU decomposition onto the disentangled of general exponential operators [J]. To be submitted.

[182] Fan H Y. General formalism for mapping of two-mode classical canonical transformations to quantum unitary operators [J]. Commun. Theor. Phys., 1992, 17(3): 355 - 360.

[183] Cahill K E, Glauber R J. Density operators and quasiprobability distributions[J]. Phys. Rev., 1969, 177:1882.

[184] Cahill K E, Glauber R J. Ordered expansions in boson amplitude oper-

ators [J]. Phys. Rev., 1969, 177:1857.

[185] de Oliveira A M F. s-order nondiagonal quasiprobabilities[J]. Phys. Rev. A, 1992, 45: 5104.

[186] Fan H Y. Unifying the theory of Integration within normal-, Weyl- and antinormal-ordering of operators and the s-ordered operator expansion formula of density operators [J]. Chin. Phys. B, 2010, 19(5): 050303.

[187] Schleich W P. Quantum optics in phase space [M]. Berlin: Wiley-VCH, 2001.

[188] Glauber R J. Photon Correlations [J]. Phys. Rev. Lett., 1963, 10: 84.

Sudarshan E C G. Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams [J]. Phys. Rev. Lett. 1963, 10: 277.

[189] Fan H Y, Yuan H C, Hu L Y. Operators' s-parameterized ordering and its classical correspondence in quantum optics theory [J]. Chin. Phys. B, 2010, 19(10): 104204,

[190] Fan H Y, Xu Y J, Yuan H C. s-ordered operator expansions of quantum-mechanical representations and their applications [J]. Sci. China Ser. G:Phys. Mech. Astron., 2011, in press.

[191] Fan H Y, Vander Linde J. Simple approach to the wave functions of one-and two-mode squeezed states[J]. Phys Rev. A, 1989, 39(3): 1552 - 1555.

[192] Fan H Y, Fan Y. Representations of two-mode squeezing transformations [J]. Phys. Rev. A, 1996, 54(1): 958.

[193] Fan H Y. Newton-Leibniz integration for ket-bra operators in quantum mechanics(IV)- Integrations within Weyl ordered product of operators and their applications [J]. Ann. Phys., 2008, 323:500 - 526.

[194] Smithey D T, Beck M, Raymer M G. Measurement of the Wigner distribution and the density matrix of a light mode using optical homodyne tomography: Application to squeezed states and the vacuum[J]. Phys. Rev. Lett., 1993, 70: 1244 - 1247.

[195] Fan H Y, Wang J S. New Approach for calculating tomograms of quantum states by virtue of the IWOP technique [J]. Commun. Theor. Phys., 2007, 47(3): 431 - 436.

[196] Fan H Y, Cheng H L. Two-parameter Radon transformation of the Wigner operators and its inverse [J]. Chin. Phys. Lett., 2001, 18 (7): 850.

[197] Yu W J, Xu Y J, Yuan H C, et al. s-ordered expansion of the intermediate representation projector and its applications [J]. Int. J. Theor. Phyz., 2011, in press.

[198] Yuan H C, Xu X X, Fan H Y. The s-ordered expansions of the operator function about the combined quadrature $\mu\hat{X}+\nu\hat{P}$ [J]. Sci. China Ser. G: Phys. Mech. Astron., 2010, 53(10): 1793 - 1798.

[199] Meystre P, Sargent Ⅲ M. Elements of quantum oprics [M]. Berlin: Springer, 2007.

[200] Fan H Y, Li H Q. Physics of a kind of normally ordered Gaussian operators in quantum optics[J]. Chin. Phys. Lett. 2007, 24: 3322.

[201] Orszag M. Quantum optics [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2000.

[202] London R. The quantum theory of light [M]. 2 ed. Oxford: Oxford University Press, 1983.

[203] Kelley P L, Kleiner W H. Theory of electromagnetic field measurement and photoelectron counting [J]. Phys. Rev., 1964, 136: 316 - 334.

[204] Scully M O, Lamb J W E. Quantum theory of an optical maser. III. Theory of photoelectron counting statistics [J]. Phys. Rev., 1969, 179: 368 - 374.

[205] Mollow B R. Quantum theory of field attenuation [J]. Phys. Rev., 1968, 168: 1896 - 1919.

[206] Mogilevtsev D, Řeháček J, Hradil Z. Relative tomography of an unknown quantum state [J]. Phys. Rev. A, 2009, 79(2): 020101(R).

[207] Fan H Y, Hu L Y. Two quantum-mechanical photocount formulas [J]. Opt. Lett., 2008, 33: 443 - 445.

[208] Yuan H C, Fan H Y, Hu L Y. A new quantum mechanical photon

counting distribution formula [J]. To be submitted.

[209] Lü C H, Yuan H C, Fan H Y. s-parameterized photocount formula [J]. Oplik 2011, in press.

[210] Magnus W, Oberhettinger F, Soni R P. Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1966.

[211] Fan H Y, Li H Q. Physics of a kind of normally ordered Gaussian operators in quantum optics [J]. Chin. Phys. Lett., 2007, 24(12): 3322 - 3324.

[212] Glauber R J, Skargerstam B S. Coherent states [M]. Singapore: World Scirntific 1985.

[213] Cahill K E, Glauber R J. Density operators for fermions[J]. Phys. Rev. A 1999, 59: 1538.

[214] Ohnuki Y, Kashiwa T. Coherent states of Fermi operators and the path integral[J]. Prog. Theor. Phys. 1978,60:548.

[215] Berezin F A. The method of second quantization [M]. New York: Academic, 1966.

[216] Fan H Y, VanderLine J. Generalized Bogolyubov transformation [J]. J. Phys. A: Math. Gen., 1990, 23: L1113 - L1117.

[217] Fan H Y. Permutation operators in Hilbert space gained via the IWOP technique—fermion case [J]. J. Phys. A: Math. Gen. 1989, 22: 3423 - 3428.

[218] Fan H Y. Invariance of Weyl ordering of Fermi operators under similar transformations [J]. Mod. Phys. Lett. A, 2006, 21(10): 809 - 820.

[219] Fan H Y. Application of Weyl-Wigner method in calculating thermal averages [J]. Commun. Theor. Phys. 1991,16(1): 123 - 128.

[220] Xu Y J, Song J, Yuan H C, et al. Quantization scheme for Fermionic system amd s-ordered operator expansion formula of Fermionic density operators [J]. Mod. Phys. Lett. A, 2011, 26(11):833 - 842.

[221] Fan H Y. Mapping of a classical transformation in Grassmann number space to a Fermi unitary operator [J]. Phys. Rev. A 1989, 40: 4237 - 4241.

# 结　语

尽管物理学是实验科学，但它的发展（甚至于是关键性的革命性的进展）离不开理论学家的先进思维和数学推导，现在物理学已经演变为一门高度数学化了的学科，在某些阶段（甚至于在很多场合下），理论的数学结论走在了实验证实的前面. 正如爱因斯坦的好朋友，物理学家 M. V. 劳厄曾说过，"数学终于成为物理学家的思想工具，唯有它才能以最终的、精确的和便于讲授的形式表达自然规律，唯有它才可以应用于错综复杂的过程中. 物理学提出的问题不止一次地直接推动了数学的发展."

物理理论的简单性体现于基本定律的数学形式的简洁和优美，这种简洁往往在数学发展到一定程度才显现出来，是很高的艺术境界. 物理学家的思维习惯和方式与数学家的不同，因此物理学家有时候不得不自己发明新的数学，以简化繁琐的数学方法. 这就是为什么物理理论的发展交织在由简至繁、再由繁至简的演进中.

本书中介绍的 Dirac 符号法进阶的理论核心是有序算符内的积分方法，它是物理学工作者自己琢磨出来的数学. 该理论发展和丰富了 Dirac 符号法，它是有效和简明的，在求解问题和形成观点的过程中有自身逐步展开的能力，使读者能在更高的层次上欣赏量子力学的进展，可谓"欲穷千里目，更上一层楼. "爱因斯坦曾说，"数学比其他科学受到更高的尊崇，其理由之一是数学的规律是绝对肯定而无可争辩的，而其他科学的规律在某种程度上都是可以争论的，而且经常存在着被发现的事实推翻的危险. "因此，我们认为，有序算符内的积分方法的正确性和可适用性从一个新的角度暗示了我们现在的量子力学是严密的科学. 另一方面，有

序算符内的积分方法也在阐述量子物理规律的简单性中起到了独特的作用，然而，简洁的物理公式有时比人还聪明，难怪爱因斯坦说："……我却永远不会说我真正懂得了自然规律的简单性所包含的意思．"